Intégrales à poids et polynômes orthogonaux

*En algèbre linéaire, il est important de connaître quelques bases de référence, et en fonction du produit scalaire, on peut même avoir des bases orthogonales ou orthonormales. Nous verrons ici des produits scalaires à poids pour lesquels on retiendra quelques familles de **polynômes orthogonaux** classiques : d'ailleurs, ces derniers facilitent les calculs et permettent même d'obtenir la valeur approchée d'une intégrale à poids, ce sont les **méthodes de quadrature**.*

1. Un premier exemple : les polynômes de Tchebychev

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. La suite (T_n) désigne la suite des **polynômes de Tchebychev**.

   On définit alors l'application :
   $$\phi : (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

   (a) Justifier que l'intégrale précédente est convergente pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.
   (b) Montrer que ϕ désigne un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Etablir que (T_n) définit une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.

On se place désormais dans un cas plus général et on note I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considére le poids $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qu'on suppose continue sur I et tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t \longmapsto t^n \omega(t) \in L^1(I, \mathbb{R})$$

2. Montrer que $\phi : (P,Q) \longmapsto \int_I P(t)Q(t)\omega(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Etablir qu'il existe une unique famille de polynômes orthogonaux (P_n) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$deg(P_n) = n \text{ et } dom(P_n) = 1$$
   On pourra procéder par existence et unicité.
4. Justifier que (P_n) désigne une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque On a déjà croisé de nombreuses familles de polynômes orthogonaux et par exemple, on essaiera de retenir ces familles de polynômes très classiques. Attention, parfois ils ne sont pas définis unitaires, mais on pourra toujours s'y ramener.

poids $\omega(t)$	défini sur l'intervalle	polynômes orthogonaux associés
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1,1[$	polynômes de Tchebychev
1	$]-1,1[$	polynômes de Legendre
$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$	$]-1,1[$	polynômes de Jacobi
e^{-t}	$]0,+\infty[$	polynômes de Laguerre
e^{-t^2}	$\mathbb{R}$	polynômes de Hermite

5. Notons (P_n) la suite de polynômes orthogonaux associés à un poids ω.
   On fixe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et on introduit $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ avec $1 \leq k \leq n$, l'ensemble des racines de P_n sur I d'ordre de muliplicité impair et si A est non vide, on pose :
   $$Q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)$$
   sinon, on pose $Q(X) = 1$.

   (a) Justifier que P_nQ est non nul et de signe constant.
   (b) En déduire que P_n est nécessairement scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque Ainsi, on pourra retenir que **tous ces polynômes orthogonaux sont scindés à racines simples**, et leurs racines $x_1, \dots, x_n$ joueront un rôle important dans l'approximation des intégrales. En effet, il existe des méthodes liées à ces polynômes et pour lesquelles on a :
$$\int_I f(t)\omega(t)\, dt \simeq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \text{ avec } \alpha_i \text{ un coefficient de pondération dépendant de } \omega$$