Le théorème de convergence dominée : présentation et applications

Dans le début de ce chapitre, nous avons étudié nos premières suites d'intégrales. Malheureusement, il n'est pas toujours facile de déterminer leur comportement asymptotique, mais quand on le pourra, on essaiera de faire appel au ***théorème de convergence dominée*** *: il s'agit d'un théorème fondamental qui permet de passer à la limite sous le signe intégral.*
Celui-ci est admis au programme de MP car il repose sur la construction d'une autre intégrale : ***l'intégrale de Lebesgue****, mais il est très puissant et il faudra apprendre à le manipuler dans le cadre des suites ou séries de fonctions.*

Théorème 1 (de convergence dominée).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose de plus que :

- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f_n| \le \phi \quad \text{(indépendante de } n\text{)}$$

Alors, f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f_n(t)\,dt$ tend vers $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt$$

Remarques

1. Il s'agit d'abord d'un résultat d'**intégrabilité**, c'est à dire qu'il nous donne l'existence de $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$, et donc de l'intégrale généralisée de f sur I.
2. Les fonctions peuvent être continues par morceaux, et ainsi on pourra avoir :
   - des limites simples qui en fonction de t fixé dans un intervalle, prennent des valeurs différentes.
   - une domination par morceaux, en fonction une fois encore du découpage de l'intervalle I, mais ceci sera réservé aux exercices les plus techniques.

Un premier exemple d'application : calcul de l'intégrale de Gauss
On considère l'**intégrale de Gauss** définie par :

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt$$

et on définit la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \begin{cases} (1-\dfrac{t^2}{n})^n, \text{ pour } t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$.

1. (a) Justifier que $t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$, puis retrouver la valeur de I.

Un second exemple d'application : calcul de l'intégrale de Dirichlet
Sous réserve d'existence et à x fixé, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$.

2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On admet que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t})\,dt$.
   (a) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

On pourra introduire pour tout $x \ge 0$, $\phi(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ où $h : t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ qu'on prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

Le cas particulier des séries de fonctions
Quand on présente l'étude des séries, on explique qu'il s'agit d'abord d'étudier une suite, celle des sommes partielles (S_n). De la même manière, on pourra donc invoquer le **théorème de convergence dominée dans l'étude des séries de fonctions** : il suffira de vérifier que la suite des sommes partielles satisfait encore les mêmes hypothèses.

4. Justifier que la série $\sum n^{-n}$ est convergente.

5. Montrer que $t \longmapsto t^{-t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

6. En déduire l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\, dt$$

Remarque Dans cette dernière question, on a échangé les symboles $\sum / \int$ grâce au théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles (S_n)... c'est là une méthode efficace qu'il faudra retenir, et ce ne sera pas la seule ! Il faudra donc apprendre à choisir la bonne méthode au bon moment :)