Condition suffisante de convergence et intégrale de Dirichlet

*On présente ici la notion d'**intégrales généralisées** : si la notion est encore un peu délicate pour vous, elle est très proche du chapitre sur les séries, et on apprendra à justifier l'intégrabilité d'une fonction par comparaison à des fonctions usuelles. D'ailleurs, on étudie ici l'**intégrale de Dirichlet**, une intégrale convergente mais qui ne converge pas absolument... à l'instar de la série harmonique alternée, elle nous permet de justifier que la convergence absolue n'est qu'**une condition suffisante de convergence**.*

Dans ce TD, on rappelle que pour toute fonction f continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on dit que l'intégrale généralisée sur $[a, b[$ est **convergente** si $\int_a^X f(t)\,dt$ possède une limite finie quand $X \to b$ et on note alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{X \to b} \int_a^X f(t)\,dt$$

De plus, en adaptant la preuve pour les séries numériques, on a encore le théorème suivant :

Théorème 1 (condition suffisante pour qu'une intégrale soit convergente)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si de plus, l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt$ est convergente, alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ est convergente.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.
2. Justifier rapidement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est aussi convergente.

Ainsi, on pourra retenir que par linéarité, l'**intégrale de Dirichlet** définie par $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

3. (a) Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin(t)|\,dt = 2$$

   (b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis justifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,dt$ est divergente.

Remarque On utilise le même vocabulaire que pour les séries, et on dit que cette intégrale est en fait **semi-convergente**.

Pour finir, on considère les suites d'intégrales (I_n) et (J_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt$$

4. **Lemme de Riemann-Lebesgue**. Soit g une autre fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles, et on considère $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier que g et g' sont bornées sur $[a, b]$. On note $M_0 = \max |g(t)|$ et $M_1 = \max |g'(t)|$.
   (b) Montrer que :

$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de I_n, puis montrer que la suite (I_n) est constante.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de J_n, puis établir que :

$$J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

   (c) En déduire finalement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.