Le polynôme caractéristique : définition et applications

Nous rappelons ici la définition du polynôme caractéristique. Si dans la pratique, il nous permet d'expliciter une base de réduction, il a de nombreuses propriétés et on pourra notamment exploiter celles-ci pour justifier la densité de certains sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme χ_A défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \chi_A(\lambda) = det(\lambda.I_n - A)$$

Attention, cette définition par le déterminant n'a du sens que pour $\lambda \in \mathbb{C}$. On peut évidemment évaluer un tel polynôme en spécifiant la valeur de l'indéterminée en un endomorphisme ou une matrice donnée... mais pour cela, il nous faudra d'abord l'obtenir explicitement !

1. En revenant à la définition du déterminant, justifier que :
$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + q_1\lambda + q_0$$
avec $q_0 = (-1)^n det(A)$ et $q_{n-1} = -tr(A)$.

2. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, on introduit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\exists\, X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\backslash\{0\},\ AX = \lambda_0 X$
   (ii) $\exists\, x \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\},\ f(x) = \lambda_0 x$
   (iii) $Ker(f - \lambda_0 id) \neq \{0\}$
   (iv) $\chi_A(\lambda_0) = 0$

Si l'une de ces assertions est vérifiée, alors on dit que λ_0 désigne une **valeur propre** de A (ou de f), et X (ou x) est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ_0. En particulier, on pourra retenir que ces valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A.

3. Soit $p \in [\![1, n]\!]$, et notons $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.
4. (a) On se place dans le cas particulier où f admet n valeurs propres distinctes. Justifier que f est nécessairement diagonalisable, c'est à dire que A est semblable à une matrice diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Plus généralement, montrer que f est diagonalisable si et seulement si f annule un polynôme scindé à racines simples.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, c'est à dire semblable à une matrice triangulaire.

Remarques

1. On a ici des résultats sur la diagonalisabilité d'un endomorphisme, des résultats que nous reverrons... mais attention : ne condondez pas la **condition suffisante sur les valeurs propres distinctes** et le **critère de diagonalisation**.
2. En fait, le polynôme caractéristique n'a pas toujours de racines sur $\mathbb{R}$ et c'est pour cela qu'on ne pourra pas toujours réduire un endomorphisme défini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par contre, pour une matrice donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut alors se plonger dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et dans ce cas, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T \text{ triangulaire à coefficients éventuellement complexes.}$$
3. On montre facilement que le polynôme caractéristique est aussi un **invariant de similitude**, et donc :
$$\chi_A(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - t_{ii})$$
et ainsi, T étant triangulaire, les coefficients diagonaux ne sont rien d'autres que les valeurs propres !

6. **Applications**
   (a) Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir que $\mathcal{D}_n$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque On essaiera de retenir ces résultats fort pratiques, car ils nous permettent de prouver des égalités établies pour des matrices particulières avant de les étendre par simple passage à la limite. Par exemple, on prouve une égalité matricielle sur les matrices diagonales, puis les matrices diagonalisables et par densité, on peut éventuellement la prolonger sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.