Quelques propriétés des endomorphismes et matrices nilpotentes

*On revient ici sur les endomorphismes nilpotents et les matrices nilpotentes : leurs propriétés sont nombreuses et ils auront un rôle fondamental, plus tard, dans la **réduction des endomorphismes en dimension finie**.*

On rappelle rapidement qu' :

- un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est **nilpotent** s'il exsite $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^\alpha = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** s'il exsite $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^\alpha = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

De plus, dans tout le problème, on admet le **théorème de Cayley-Hamilton** :

Théorème 1 (de Cayley-Hamilton)**.**

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et notons χ_f son polynôme caractéristique défini par :
$$\chi_f(\lambda) = det(\lambda id_E - f)$$
Alors, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et ainsi, χ_f est un **polynôme annulateur** de f.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons χ_M son polynôme caractéristique défini par :
$$\chi_M(\lambda) = det(\lambda I_n - M)$$
Alors, $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et ainsi, χ_M est un **polynôme annulateur** de M.

1. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $p = \min\{\alpha \in \mathbb{N}^*, M^\alpha = 0\}$. Justifier que p existe : il est appelé l'**indice de nilpotence** de M de sorte que :
$$M^p = 0 \text{ et } M^{p-1} \neq 0$$
2. (a) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont nilpotentes.
   (b) On pose $C = A + B$ et on introduit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C. Etablir de deux façons que C est semblable à la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (c) La somme de deux matrices nilpotentes est-elle encore nilpotente ?
3. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que ces deux matrices sont nilpotentes et que de plus $MN = NM$.
   (a) Montrer que le produit MN est nilpotent.
   (b) Montrer que la somme $M + N$ est encore nilpotente.
4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent d'indice $p \geq 1$.
   (a) Justifier que nécessairement $p \leq n$.
   (b) Montrer qu'on a la suite d'inclusions strictes :
$$\{0_E\} \subsetneq Ker(f) \subsetneq Ker(f^2) \ldots \subsetneq Ker(f^{p-1}) \subsetneq Ker(f^p) = E$$
   (c) Prouver alors qu'il existe une base B dans laquelle la matrice de f est triangulaire strictement supérieure et peut s'écrire par blocs :
$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} O_1 & \bigstar & \ldots & \bigstar \\ \vdots & O_2 & \ddots & \vdots \\ & & & \bigstar \\ (0) & \ldots & & O_p \end{pmatrix}$$

Remarques

1. On essaiera de retenir le principe de réduction de ces endomorphismes nilpotents qui fait intervenir des vecteurs bien choisis dans la suite de noyaux itérés.
2. Plus grossièrement, une matrice nilpotente est toujours **trigonalisable** : en effet, on a montré qu'elle pouvait être semblable à une matrice triangulaire dans laquelle les coefficients diagonaux sont nuls.

5. **Première caractérisation**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est : $\chi_M(\lambda) = \lambda^n$.

En particulier, cela équivaut à dire que 0 *est la seule racine du polynôme caractéristique : on dit aussi que* 0 *est la seule* ***valeur propre****.*

6. **Deuxième caractérisation**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si :

$$tr(M) = tr(M^2) = \ldots = tr(M^n) = 0$$

Pour le sens réciproque, on pourra travailler par récurrence sur n, la taille de la matrice considérée.