Séries entières : théorème d'Abel radial et théorème de Bernstein

*Les séries entières sont un prétexte à de nombreux sujets de concours. Pour aller plus loin, nous verrons ici deux théorèmes pratiques : le **théorème d'Abel radial** qui nous livre la convergence uniforme sur un segment jusqu'au bord du domaine de convergence et le **théorème de Bernstein** qui nous permet d'affirmer que certaines classes de fonctions sont nécessairement développables en série entière au voisinage de 0.*

Théorème d'Abel radial et exemple d'application

1. On considère une série entière complexe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\sum a_n R^n e^{in\theta}$ converge. En particulier, on définit le reste partiel pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k (Re^{i\theta})^k$$

   (a) Soit z un nombre complexe du segment $[0, Re^{i\theta}]$ de sorte que $z = tRe^{i\theta}$, avec $t \in [0, 1]$. Etablir pour $N \in \mathbb{N}$ que :

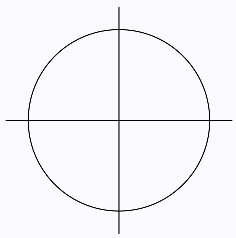
$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^n = \rho_N t^N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \rho_n (t^n - t^{n-1})$$

   (b) En déduire que la série d'une variable réelle $\sum a_n t^n R^n e^{in\theta}$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

Remarque Ici, on a prouvé la convergence uniforme en se ramenant à la convergence uniforme du reste partiel en 0, et on pourra retenir ce résultat qui permet notamment de **prolonger par continuité nos développements en série entière en un point du cercle d'incertitude** :

Théorème 1 (d'Abel radial dans le plan complexe)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe dont on note $R > 0$ le rayon de convergence. On suppose qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\sum a_n R^n e^{in\theta}$ converge.
Alors, la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, Re^{i\theta}]$ du plan complexe :



En particulier, la série entière est continue sur ce segment du plan complexe et :

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{in\theta} = S(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n e^{in\theta}$$

2. **Application** Etablir que la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, puis justifier que :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

Théorème de Bernstein

On rappelle que si une fonction est de classe C^∞ sur un intervalle I, alors on peut appliquer la formule de Taylor à tout ordre et ainsi, avec $I =]-a, a[$, on a par exemple pour une telle fonction :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \text{ où } R_n(x) \text{ désigne le reste intégral}$$

En particulier, **on peut obtenir une CNS naïve** pour qu'une telle fonction C^∞ soit DSE sur $]-a, a[$:

$$f \text{ est DSE sur }]-a, a[\ \Leftrightarrow\ \forall x \in]-a, a[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \ \Leftrightarrow\ \forall x \in]-a, a[, R_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On va alors essayer de montrer cette convergence simple du reste intégral vers 0 pour une classe de fonctions particulières : les **fonctions absolument monotones**, des fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I telles que :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) \geq 0$$

3. Etablir que les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ et $g : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\longmapsto \tan(x)$ sont absolument monotones sur leur intervalle de définition.

Soit f une telle fonction de classe C^∞ qu'on suppose absolument monotone sur $]-a, a[$ avec $a > 0$.

4. (a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 0, justifier que le reste intégral vérifie :

$$\forall x \in]-a, a[,\ R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\, du$$

   (b) Soit $x \in]-a, a[$ et notons $r > 0$ tel que $|x| < r < a$. Montrer que :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}} R_n(r)$$

   (c) En déduire alors que $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Remarques

1. Finalement, on essaiera de retenir différentes façons de justifer qu'une fonction est développable en série entière :
   - on peut toujours justifier qu'une fonction est développable en série entière **par opérations algébriques** sur les DSE des fonctions usuelles... et on fera attention au domaine de convergence.
   - on peut se ramener à la formule de Taylor avec reste intégral sur un intervalle centré en 0 et montrer que le reste intégral converge simplement vers 0 sur cet intervalle.

   Par exemple, on a montré :

$$\begin{cases} \text{si les dérivées de } f \text{ sont } \textbf{uniformément bornées}, \text{ alors } R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et donc } f \text{ est bien DSE.} \\ \text{si } f \text{ est } \textbf{absolument monotone}, \text{ alors } R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et par le théorème de Bernstein, } f \text{ est bien DSE.} \end{cases}$$

2. On retiendra notamment que la fonction tan est développable en série entière sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et par imparité de tan, elle est même DSE sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.