Théorème de Cauhy-Lipschitz linéaire et applications

Au programme de MP, le ***théorème de Cauchy-Lipschitz*** *dans sa version linéaire est admis, néanmoins il ne faudra pas avoir peur de le citer car il nous livre en partie la structure des solutions d'une équation différentielle linéaire. Nous verrons ici comment la connaissance de cette structure oriente la recherche des solutions, que ce soit en mettant en oeuvre la méthode de variation des constantes ou à l'aide des séries entières.*

Théorème 1 (de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$$

avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I.
Alors, on admet que pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ X'(t) + A(t)X(t) = B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad (*)$$

On dit aussi que X est l'unique solution du **problème de Cauchy** $(*)$.

Remarque Bien entendu, si on identifie $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_{11}(\mathbb{K})$, alors ce théorème nous permet d'affirmer pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, que pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ x'(t) + a(t)x(t) = b(t) \\ x(t_0) = \alpha \end{cases}$$

C'est un résultat qui a été démontré en MPSI, car en utilisant le facteur intégrant, on peut expliciter facilement l'unique solution d'un tel problème de Cauchy.

1. On se place maintenant dans le vas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, et on considère le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{cases}$$
En posant $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, montrer que $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution de ce problème de Cauchy si et seulement si X vérifie un problème de Cauchy de la forme $(*)$.

Remarque On en déduit alors pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, qu'on a aussi existence et unicité d'une solution satisfaisant les deux conditions initiales données.

Structure des solutions

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définit sur un intervalle I :

$$(E) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

avec $a, b, c \in C^0(I, \mathbb{K})$

2. On note S_0 les solutions de l'équation homogène $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et en définissant un isomorphisme, préciser sa dimension.

3. Soit f_p une solution particulière de l'équation différentielle (E), établir que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $f_1, f_2 \in S_0$ telles que :
$$f = f_p + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

Remarques On retrouve ici un résultat général concernant les solutions d'une équation différentielle linéaire :

$$S = f_p + S_0$$

et en fonction de l'ordre de celle-ci, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permettra même d'affiner le travail sur S_0.

Concrètement, on procèdera le plus souvent en deux temps :

- on commence par déterminer des solutions indépendantes qui engendrent S_0. On parle ici de **système fondamental de solutions** et en première année, on vous a donné quelques méthodes pour exhiber ces fonctions particulières.
- en fonction du second membre, on peut chercher une solution particulière, mais si elle n'est pas simple à déterminer, on pourra alors mettre en place la **méthode de variations de la ou des constantes**... c'est là un exercice calculatoire et par exemple, pour une équation d'ordre 2, on cherchera f_p sous la forme :

  $$f_p(t) = \lambda_1(t)f_1(t) + \lambda_2(t)f_2(t)$$

  et ceci, en s'imposant une contrainte de calcul pour faciliter la résolution : $\lambda_1'(t)f_1(t) + \lambda_2'(t)f_2(t) = 0$.

Applications

4. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E_1) \quad y"(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

   (a) Etablir que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et en notant $argsh$ sa bijection récciproque, calculer $argsh'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer S l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).

5. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E_2) \quad xy"(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$$

   (a) En procédant par analyse-synthèse, montrer que cette équation admet des solutions développables en série entière.

   (b) Prouver que $x \longmapsto \dfrac{ch(x)}{x}$ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$, et également sur $\mathbb{R}_-^*$.

   (c) Montrer en fait qu'il existe une unique solution f de (E_2) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$.

Remarque Attention, c'est assez subtil mais dans cette dernière question, on ne peut pas appliquer directement le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. En effet, celui-ci n'est valable que pour des équations différentielles données **sur un intervalle et sous une forme résolue**...

Par exemple, l'équation précédente peut s'écrire sous forme résolue sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$xy"(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0 \Leftrightarrow y"(x) + \frac{2}{x}y'(x) - y(x) = 0$$

mais on ne pourra pas invoquer le théorème sur $\mathbb{R}$. Il s'agit donc de faire "à la main" un **raccordement de solutions** et de montrer par analyse-synthèse qu'il existe quand même une solution unique sur $\mathbb{R}$ tout entier vérifiant la condition donnée.