Autour de la fonction Γ

*L'étude de la fonction Γ est un exercice très classique de spé. Cette intégrale à paramètre est importante, car elle offre un prolongement de la notation factorielle sur $\mathbb{R}$. Mais cette fonction intégrale possède d'autres propriétés qu'on pourra retenir, et même des propriétés caractéristiques : on parle ici du **théorème de Bohr-Mollerup**.*

On rappelle que la fonction Γ désigne l'intégrale à paramètre définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

1. (a) Justifier que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Calculer $\Gamma(1)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Remarque On observe ici que la fonction Γ coïncide, à un décalage près, avec la fonction factorielle : c'est pour cela qu'elle peut être vue comme un prolongement naturel de la factorielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite de fonction (f_n) définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(t) = \begin{cases} (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} \text{ , si } t \in]0,n] \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$.

   Etablir que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

3. **Formule de Weiertrass et constante d'Euler-Mascheroni**
   (a) Rappeler le développement asymptotique de la série harmonique.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, puis retrouver la **formule de Weiertrass** :

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}((1+\frac{x}{k})e^{-x/k})$$

   (c) En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(\Gamma(x)) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{x}{k} - \ln(1+\frac{x}{k}))$.
   (d) Les résultats sur les intégrales à paramètre nous permettront de justifier que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Etablir alors que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

4. Soit $(p,q) \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. On considère de plus f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives telles que f^p et g^q soient intégrables sur $]0,+\infty[$. Alors, on rappelle que l'**inégalité de Hölder** nous donne :

$$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\, dt \le (\int_0^{+\infty} f(t)^p\, dt)^{1/p}.(\int_0^{+\infty} g(t)^q\, dt)^{1/q}$$

   Montrer que la fonction Γ est log-convexe, c'est à dire que $\ln\circ\Gamma$ est convexe de sorte que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\lambda \in [0,1],\ \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \Gamma(x)^\lambda.\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

   On pourra aussi proposer une seconde méthode plus classique... surtout si on connaît les dérivées successives de Γ.

Pour finir, on souhaite démontrer le **théorème de Bohr-Mollerup** qui nous permettra de caractériser la fonction Γ :

Théorème 1 (de Bohr-Mollerup).

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x) \\ f \text{ est log-convexe sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$. Alors, $f = \Gamma$.

Pour cela, on note f une telle fonction satisfaisant les conditions précédentes.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a encore $f(n+1) = n!$ et pour tout $x > 0$, $f(x+n+1) = f(x)\prod_{k=0}^n (x+k)$.
6. Vérifier que pour tout $x \in]0,1]$,

$$n+1+x = x(n+2) + (1-x)(n+1) \quad\text{et}\quad n+2 = x(n+1+x) + (1-x)(n+2+x)$$

   puis établir que pour tout $x \in]0,1]$, $\frac{(n+1+x)^{x-1}(n+1)!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \le f(x) \le \frac{(n+1)^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.
7. Montrer alors que $f = \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.