Surjectivité de l'exponentielle de matrices et application

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on prouve facilement l'existence de l'exponentielle de matrices. D'ailleurs, on peut même définir une fonction vectorielle très utile : la fonction $t \longmapsto \exp(tA)$ dont on peut prouver la dérivabilité... mais ce travail sur l'exponentielle de matrices nous permettra d'aller plus loin et ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\exp(A) = M$$

On dit que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ *est* ***surjective****.*

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\|.\|$ la norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

On note enfin ϕ la fonction vectorielle telle que $\phi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(tA)$.

1. Justifier rapidement que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t)$ est bien définie.
2. (a) En vous ramenant à un taux d'accroissement, établir que ϕ est dérivable en 0 et que $\phi'(0) = A$ de sorte que :
$$\frac{\exp(hA) - I_n}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} A$$
   (b) En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.

Remarque En fait, le prochain chapitre sur les séries de fonctions nous permettra d'étendre ce résultat, et ainsi on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{d}{dt}(\exp(t^k A)) = kt^{k-1}A(\exp(t^k A))$$

3. Fixons $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Justifier que M est semblable à une matrice triangulaire par blocs de la forme :
$$M' = \begin{pmatrix} B_1 & & (0) & \\ & B_2 & & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & B_p \end{pmatrix}, \text{ avec des blocs } B_i = \lambda_i(I_{m_{\lambda_i}} + N_i), \text{ et } N_i \text{ triangulaire stricte.}$$
   Pour la suite, on note $I_{m_{\lambda_i}} + N_i = I_m + N$, et on cherche un antécédent par la fonction exp.
   Pour cela, on va montrer que :
$$\exp(N - \frac{N^2}{2} + \ldots + (-1)^{m-2}\frac{N^{m-1}}{m-1}) = I_m + N \quad (*)$$
   On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} D(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}t^k N^k}{k} \\ S(t) = \exp(D(t)) \end{cases}$.
   (b) Etablir que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_m + tN)D'(t) = N$, puis en déduire que :
$$(I_m + tN)S'(t) = NS(t) \quad (**)$$
   (c) Dériver cette dernière expression $(**)$, et montrer que nécessairement, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = I_m + tN$.
   (d) En déduire que $\exp(N - \frac{N^2}{2} + \ldots + (-1)^{m-2}\frac{N^{m-1}}{m-1}) = I_m + N$.
   (e) On introduit enfin $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\mu_i} = \lambda_i$. Montrer que $\exp(\mu_i I_{m_{\lambda_i}} + D(1)) = B_i$, puis établir qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\exp(A) = M$.
4. **Application à la connexité**
   Soient $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\gamma(1) = P$ et $\gamma(0) = Q$.

Remarque On pourra encore retenir que c'est bien la **décomposition de Dunford** qui nous aide à aller chercher la surjectivité de l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. D'ailleurs, ce résultat est très pratique et il nous permet alors d'établir facilement la **connexité par arcs** de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.