Autour de la décomposition spectrale

Pour réduire un endomorphisme ou une matrice carrée, on a vu qu'on cherchait d'abord à obtenir une décompostion de l'espace en somme directe de sous-espaces stables... C'est là un des intérêts du théorème de Cayley-Hamilton, puisqu'il nous livre une telle ***décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces caractéristiques*** *: c'est la* ***décomposition spectrale****.*

On se place dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimenion finie $n \geq 1$, on note $f \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose que le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ de la forme :

$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$$

1. Justifier rapidement qu'on a :
$$E = \oplus_{i=1}^{p} E_{c,f}(\lambda_i)$$
où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de f, et $E_{c,f}(\lambda_i)$ est le sous-espace caractéristique associé à λ_i.

2. Fixons $i \in [\![1, p]\!]$. On définit p_i la projection sur $E_{c,f}(\lambda_i)$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_{c,f}(\lambda_j)$. Justifier rapidement que :
$$\begin{cases} id_E = \sum_{i=1}^{p} p_i \quad (*) \\ Im(p_i) = E_{c,f}(\lambda_i) \text{ et } Ker(p_i) = \oplus_{j \neq i} E_{c,f}(\lambda_j) \end{cases}$$

3. On reprend la factorisation de χ_f. On se place dans le cas où $p \geq 2$ et on note $Q_i(X) = \prod_{j \in [\![1,p]\!], j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_{\lambda_j}}$.
   (a) Montrer qu'il existe $U_1, \ldots, U_p \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
   $$id_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + \ldots + U_p(f) \circ Q_p(f) \quad (**)$$
   (b) On pose alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $p'_i = U_i(f) \circ Q_i(f)$. Montrer que ces polynômes d'endomorphisme vérifient pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow p'_i \circ p'_j = 0$.
   (c) En déduire que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
   $$\begin{cases} p'_i \circ p'_i = p'_i \\ Im(p'_i) = E_{c,f}(\lambda_i) \text{ et } Ker(p'_i) = \oplus_{j \neq i} E_{c,f}(\lambda_j) \end{cases}$$

   Ainsi, p'_i désigne encore la projection sur $E_{c,f}(\lambda_i)$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_{c,f}(\lambda_j)$, et on a pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $p'_i = p_i$.

Remarques

1. Ces projecteurs $p_1, \ldots, p_p$ associés à la décompostion spectrale sont aussi appelés **projecteurs spectraux** et on pourra retenir que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[f]$. Autrement dit, ce sont des polynômes en f dont l'expression découle de l'identité $(**)$.

2. Dans le cas particulier où f est diagonalisable, alors on a pour chaque valeur propre :
$$\begin{cases} E_f(\lambda_i) \subset E_{c,f}(\lambda_i) \\ dim(E_f(\lambda_i)) = m_{\lambda_i} = dim(E_{c,f}(\lambda_i)) \end{cases} \Rightarrow E_f(\lambda_i) = E_{c,f}(\lambda_i)$$
On en déduit quand f est diagonalisable à l'aide de l'égalité $(*)$ que :
$$f = f \circ id_E = \sum_{i=1}^{p} f \circ p_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i$$

Pour aller plus loin, on peut aussi utiliser la **décomposition spectrale** pour obtenir une décomposition de l'endomorphisme f, à condition bien-sûr que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$, c'est le **théorème de Dunford** qu'on pourra facilement étendre aux matrices carrées :

Théorème 1 (de décomposition de Dunford)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

$$f = d + n, \text{ avec } \begin{cases} d \text{ diagonalisable et } n \text{ nilpotent} \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}$$

4. En utilisant la décomposition spectrale, prouver l'existence et l'unicité d'une telle décomposition.

5. **Applications aux matrices carrées**
   Le polynôme caractéristique étant toujours scindé sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit plus généralement que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que :

$$M = D + N, \text{ avec } \begin{cases} D \text{ diagonalisable et } N \text{ nilpotente} \\ DN = ND \end{cases}$$

   (a) On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, puis en déduire une base de réduction de sorte que $A = PTP^{-1}$, avec T une matice triangulaire supérieure. Donner alors sa décomposition de Dunford.

   (b) Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.

   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le **rayon spectral** par $\rho(M) = \max\limits_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$.
   Montrer que :

$$\rho(M) < 1 \;\Leftrightarrow\; \text{la suite } (M^k) \text{ converge vers } 0 \;\Leftrightarrow\; \text{la série } \sum M^k \text{ est convergente.}$$

   En fait, on établit que $(1) \Leftrightarrow (2)$*, puis on a trivialement que* $(2) \Leftrightarrow (3)$*.*