Racine carrée d'une matrice symétrique positive ou définie positive

L'opérateur transposé étant une symétrie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a toujours :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

mais ce n'est pas là le seul intérêt des matrices symétriques ou antisymétriques. Elles ont en effet de nombreuses propriétés à commencer par le théorème spectral qui nous permet de diagonaliser en base orthonormée toute matrice symétrique réelle.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors d'après le **théorème spectral**, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$, où D est une matrice diagonale constituée des valeurs propres de A notée ici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

De plus, on dit qu'une telle matrice symétrique réelle est :

- **positive** si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $X^T AX \geq 0$ et on note $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
- **définie positive** si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, $X^T AX > 0$ et on note $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(A),\ \lambda \geq 0$$

De la même façon, on peut adapter cette caractérisation à l'aide du spectre aux matrices symétriques définies positives de sorte que :

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(A),\ \lambda > 0$$

2. On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Justifier de deux façons que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que $A \in S_3^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice $B \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (c) Existe t-il d'autres matrices B vérifiant également l'égalité $B^2 = A$?

3. On se place à nouveau dans un cas plus général et on suppose que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer en fait qu'il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que :
$$B^2 = A$$
   On pourra procéder de deux façons... que ce soit matriciellement par existence-unicité ou à l'aide des endomorphismes canoniquement associés pour lesquels on préfèrera l'analyse/synthèse.

Remarques

1. Ce résultat est encore vraie sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on retiendra que toute matrice symétrique positive ou définie positive possède une **unique racine carrée** B, c'est à dire une matrice B vérifiant $B^2 = A$.
2. On peut aussi construire un polynôme Q de sorte que cette racine carrée B peut toujours être vue comme un polynôme en A... c'est là une utilisation assez fine du théorème d'interpolation de Lagrange !
3. D'ailleurs, il est très simple de construire cette racine carrée B... à condition d'**avoir pu réduire la matrice** A **en base orthonormée**. Dans les autres cas, on pourra investir un résultat déjà établi dans $\mathbb{R}$ et utiliser l'**algorithme de Héron** pour obtenir une suite de matrices qui approche la racine carrée B :

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe encore $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ et on définit la suite de matrices (R_p) par :

$$\begin{cases} R_0 = I_n \\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ R_{p+1} = \dfrac{1}{2}(R_p + AR_p^{-1}) \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $R_p = P\Delta_p P^T$, où Δ_p désigne une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.
5. Vérifier alors que la suite (R_p) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et telle que B soit la racine carrée de A.