Théorème des noyaux et décomposition en somme directe

On présente ici un théorème très puissant au programme de MP : ***le théorème de décomposition des noyaux****. Celui-ci provient directement de l'arithmétique des polynômes, et il nous permettra d'établir de belles choses concernant la réduction des endomorphismes en dimension finie... à condition d'avoir un* ***polynôme annulateur****.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on définit l'application $P(f) : E \longrightarrow E$ par :

$$P(f) = a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 id_E$$

avec la convention $f^n = f \circ \ldots \circ f$, et on dit que $P(f)$ est un **polynôme d'endomorphisme**.

1. Justifier que $P(f)$ désigne encore un endomorphisme de E.

2. Si P et Q appartiennent à $\mathbb{K}[X]$, établir que $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = Q(f) \circ P(f)$. En particulier, on pourra retenir que des polynômes en f commutent.

3. **Théorème des noyaux**
   On considère $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on suppose premiers entre eux. Montrer que :

   $$Ker((PQ)(f)) = Ker(P(f)) \oplus Ker(Q(f))$$

   On pourra se ramener à la caractérisation d'une telle décomposition.

4. **Théorème des noyaux généralisé**
   Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que pour tous polynômes $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ qu'on supppose premiers entre eux deux à deux, on a encore :

   $$Ker(P_1 \ldots P_n(f)) = \oplus_{i=1}^{n} Ker(P_i(f))$$

5. On considère un polynôme P scindé dans $\mathbb{K}[X]$, c'est à dire que $P(X) = a_n(X-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X-\lambda_n)^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que P est un polynôme annulateur de f au sens où $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, justifier rapidement que :

   $$E = \oplus_{i=1}^{n} Ker((f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i})$$

6. **Applications**
   (a) Soit f un projecteur de E. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
   (b) Soit f une symétrie de E. Montrer que $E = Ker(f - id_E) \oplus Ker(f + id_E)$.

Remarques

1. Sur ces deux derniers exemples, on a obtenu une décomposition de l'espace très pratique : en effet, si on prend une base adaptée à la décomposition obtenue, on peut construire une matrice de f qui sera diagonale. On dit alors qu'un projecteur et une symétrie sont des **endomorphismes diagonalisables**.

2. Attention, tous les endomorphismes ne sont pas diagonalisables et on peut obtenir des décompositions de E plus difficiles à exploiter. C'est le cas dans la question **5**, mais elle nous permettra plus tard, et à partir d'un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{K}[X]$, d'obtenir au moins une matrice triangulaire.