

CONCOURS MINES-PONTS 2022

CORRIGÉ MATHÉMATIQUES II - MP

m.laamoum@gmail.com

Autour des exponentielles de matrices

On rappelle les résultats suivants :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

Les applications suivantes sont continues, car elles sont linéaires en dimensions finies :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto A.M & M \mapsto M.A & M \mapsto P.M.P^{-1} & M \mapsto {}^t M \end{array}$$

- Soit f et g deux fonctions vectorielles, dérivables, à valeurs dans un espace de dimension finie E .
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $B : E \times E \rightarrow F$ bilinéaire et F de dimension finie. Alors les fonctions $t \rightarrow \varphi(f(t))$ et $t \rightarrow B(f(t), g(t))$ sont dérivables avec

$$(\varphi(f(t)))' = \varphi(f'(t)) \quad \text{et} \quad (B(f(t), g(t)))' = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

1 Questions préliminaires

1 ▷ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et B commutent donc pour tout m dans $\mathbb{N}$ on a

$$A \left(\sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!} \right) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{B^k}{k!} \right) A$$

Le passage à la limite sur m est justifié par la continuité, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des applications $M \mapsto A.M$ et $M \mapsto M.A$ (elles sont linéaires en dimension finie). Ainsi on a $A \cdot e^B = e^B \cdot A$.

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & e^{t(A+B)} e^{-tB} \end{array}$$

2 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$ on a $f'_A(t) = A.e^{tA} = e^{tA}.A$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \mapsto & M.N \end{array}$$

est bilinéaire et $g(t) = \varphi(e^{t(A+B)}, e^{-tB})$, donc g est dérivable et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \varphi((e^{t(A+B)})', e^{-tB}) + \varphi(e^{t(A+B)}, (e^{-tB})') \\ &= \varphi((A+B).e^{t(A+B)}, e^{-tB}) + \varphi(e^{t(A+B)}, -B.e^{-tB}) \\ &= (A+B)e^{t(A+B)}.e^{-tB} - e^{t(A+B)}.B.e^{-tB} \end{aligned}$$

Comme A et B commutent donc les matrices B et $(A+B)$ commutent par suite $e^{t(A+B)}$ et B commutent, ce qui donne

$$g'(t) = A.e^{t(A+B)}.e^{-tB} = A.g(t)$$

Soit U un vecteur de $\mathbb{K}^n$, les fonctions vectorielles : $F : t \mapsto f_A(t).U$ et $G : t \mapsto g(t).U$ sont solutions du problème de Cauchy

$$X' = A.X \text{ et } X(0) = U$$

Par unicité de la solution de ce problème on a

$$f_A(t).U = g(t).U \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ceci est vrai pour tout vecteur U donc

$$f_A(t) = g(t) \quad \text{soit } e^{t(A+B)}.e^{-tB} = e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La relation est vraie pour $A = 0$ et donne $e^{tB}.e^{-tB} = I_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}.e^{tB}$$

3 $\triangleright$ On suppose : $e^{t(A+B)} = e^{tA}.e^{tB} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. On dérive cette relation en utilisant l'application bilinéaire φ définie dans la question précédente, on obtient

$$(A+B)e^{t(A+B)} = A.e^{tA}.e^{tB} + e^{tA}.B.e^{tB}$$

On dérive une deuxième fois :

$$(A+B)^2 e^{t(A+B)} = A^2.e^{tA}.e^{tB} + A.e^{tA}.B.e^{tB} + A.e^{tA}.B.e^{tB} + e^{tA}.B^2.e^{tB}$$

(si f une fonction vectorielle à valeurs dans $M_n(K)$ dérivable, alors $(A.f(t))' = A.f'(t)$)

Pour $t = 0$ on obtient

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Or $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, ce qui prouve que $A.B = B.A$.

4 $\triangleright$ Pour toute m dans $\mathbb{N}$ on a

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^m \frac{\|A^k\|}{k!}$$

la relation (N_1) donne, par récurrence $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ ainsi

$$\left\| \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^m \frac{\|A\|^k}{k!}$$

par passage à la limite sur m , et la continuité de la norme, on obtient

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

5 $\triangleright$ A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe P matrice inversible et T triangulaire telles que $A = P.T.P^{-1}$, donc

$$e^A = P.e^T.P^{-1}$$

De plus on a

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^m \frac{T^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

par passage a la limite sur m on obtient

$$\mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{e}^A) &= \det(\mathbf{e}^T) \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ &= e^{\text{tr}(A)} \end{aligned}$$

2 Formule de Trotter-Kato

6 ▷ On a

$$\begin{aligned} \|X_k\| &\leq \|\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\| \|\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\| \\ &\leq \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right) \exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right) = \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|Y_k\| &= \|\exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right)\| \\ &\leq \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \end{aligned}$$

7 ▷ Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{tA} - I_n - tA\| &= \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A^k\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(|t| \|A\|)^k}{k!} \\ &\leq (|t| \|A\|)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(|t| \|A\|)^{k-2}}{k!} \end{aligned}$$

comme $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!}$ alors

$$\|\mathbf{e}^{tA} - I_n - tA\| \leq (|t| \|A\|)^2 e^{|t| \|A\|}$$

Dans notre cas

$$\left\| \mathbf{e}^{\frac{1}{k}A} - I_n - \frac{1}{k}A \right\| \leq \frac{\|A\|^2}{k^2} e^{\frac{1}{k}\|A\|} \leq \frac{\|A\|^2 e^{\|A\|}}{k^2}$$

donc

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A} = I_n + \frac{1}{k}A + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Ce qui donne lorsque $k \rightarrow +\infty$

$$X_k - Y_k = \left(I_n + \frac{1}{k}A + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \left(I_n + \frac{1}{k}B + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) - \left(I_n + \frac{1}{k}(A+B) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

8 ▷ On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^{i+1} Y_k^{k-(i+1)} - X_k^i Y_k^{k-i} \\ &= X_k^k - Y_k^k \end{aligned}$$

Ecrivons

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) \exp\left(\frac{1}{k}B\right) \right)^k - \exp(A+B) = X_k^k - Y_k^k$$

la relation précédente donne

$$\|X_k^k - Y_k^k\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \|X_k - Y_k\|$$

nous avons

$$\|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right), \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \|X_k^k - Y_k^k\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)^{k-1} \|X_k - Y_k\| \\ &\leq k \exp\left(\frac{(k-1)\|A\| + \|B\|}{k}\right) \|X_k - Y_k\| \\ &\leq k \exp(\|A\| + \|B\|) \|X_k - Y_k\| \end{aligned}$$

ainsi $X_k^k - Y_k^k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k^k - Y_k^k = 0$ d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) \exp\left(\frac{1}{k}B\right) \right)^k = \exp(A+B)$$

3 Vers les algèbres de Lie

9 ▷ Si $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$,

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \det \mathbf{e}^{tM} = e^{t \text{tr}(M)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$$

$\mathcal{A}_G = \ker(\text{tr})$, le noyau de la forme linéaire tr , donc c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

10 ▷ Si $G = O_n(\mathbb{R})$,

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow {}^t(\mathbf{e}^{sM}) \mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

d'autre part on a

$${}^t(\mathbf{e}^{sM}) = {}^t\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^m \frac{s^k}{k!} M^k\right)$$

l'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue donc

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{e}^{sM}) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} {}^t\left(\sum_{k=2}^m \frac{s^k}{k!} M^k\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^m \frac{s^k}{k!} ({}^tM)^k \\ &= \mathbf{e}^{s^tM} \end{aligned}$$

donc

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \mathbf{e}^{s^tM} \mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Si $M \in A_n(R)$, ${}^tM = -M$ et $\mathbf{e}^{s^tM} \mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$ donc $M \in A_G$ et $A_n(R) \subset A_G$.

Si $\mathbf{e}^{s^tM} \mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$ alors la dérivé par rapport à s donne

$${}^tM \mathbf{e}^{s^tM} \mathbf{e}^{sM} + \mathbf{e}^{s^tM} M \mathbf{e}^{sM} = 0 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}$$

en particulier pour $s = 0$, ${}^tM + M$ et $M \in A_n(R)$ et $A_G \subset A_n(R)$. Ce qui montre que $A_G = A_n(R)$.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

11 $\triangleright$ On a $I_n \in G$ donc $0 \in \mathcal{A}_G$. Soit $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{e}^{t\lambda M} \in G$$

donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$.

Soit $A, B \in \mathcal{A}_G$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $(\exp(\frac{t}{k}A) \exp(\frac{t}{k}B))^k \in G$ et G fermé donc

$$\exp(t(A+B)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right) \exp\left(\frac{t}{k}B\right) \right)^k \in G$$

et $A+B \in \mathcal{A}_G$.

Donc $\mathcal{A}_G$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

12 $\triangleright$ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{su(t)} &= \exp(s \mathbf{e}^{tA} B \mathbf{e}^{-tA}) \\ &= \mathbf{e}^{tA} \mathbf{e}^{sB} \mathbf{e}^{-tA} \in G \quad (\text{car } (e^{tA})^{-1} = \mathbf{e}^{-tA}) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathcal{A}_G$$

13 $\triangleright$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$u'(t) = A \mathbf{e}^{tA} B \mathbf{e}^{-tA} - \mathbf{e}^{tA} B A \mathbf{e}^{-tA}$$

Et on a

$$u'(0) = AB - BA$$

Comme $\frac{1}{t}(u(t) - u(0)) \in \mathcal{A}_G$ et ce dernier est fermé donc $u'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(0)}{t}$ et $\mathcal{A}_G$.

Ainsi,

$$[A, B] = AB - BA \in \mathcal{A}_G$$

14 ▷ Soit $M \in \mathcal{A}_G$, on pose $\gamma(t) = e^{tM}$ qui est un chemin dérivable dans G tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. On en déduit que $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$ et $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On trigonalise M dans $M_n(\mathbb{C})$: $M = PTP^{-1}$ avec la diagonale de T est $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les valeurs propres de A . On a

$$\begin{aligned}\delta_M(t) &= \det(I_n + tM) \\ &= \det(I_n + tT) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) \quad (\text{fonction polynomiale en } t) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t)\end{aligned}$$

On en déduit que δ_M est dérivable en 0 et $\delta'_M(0) = \text{Tr}(M)$

16 ▷ Posons $f = \det$, $\delta'_M(0)$ est la dérivée de f en I_n suivant la direction M , l'application f est différentiable, donc

$$D_M f(I_n) = df_{I_n}(M) = \delta'_M(0)$$

d'où

$$df_{I_n}(M) = \text{Tr}(M) \quad \text{et} \quad df_{I_n} = \text{Tr}$$

17 ▷ Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$ et γ application dérivable d'un voisinage de 0 vers $SL_n(\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.

On a $\det(\gamma(t)) = f \circ \gamma(t) = 1$ pour tout t au voisinage de 0. La différentielle de composée de fonction donne

$$df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$$

Pour $t = 0$ on trouve

$$df_{I_n}(M) = \text{Tr}(M) = 0$$

Ainsi on a $\mathcal{T}_{I_n}(SL_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque a été montrée en **14** ▷, d'où l'égalité.

Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))$ et γ application dérivable d'un voisinage de 0 vers $O_n(\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.

Alors, on a $\gamma(t) \cdot {}^t\gamma(t) = I_n$ pour tout t au voisinage de 0. Différentions cette relation :

$$\gamma'(t) \cdot {}^t\gamma(t) + \gamma(t) \cdot ({}^t\gamma(t))' = 0$$

la transposition est linéaire donc $({}^t\gamma(t))' = {}^t\gamma'(t)$. Ainsi pour $t = 0$, on trouve $M + M^T = 0$ Donc $\mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{O_n(\mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque a été montrée en **14** ▷, d'où l'égalité.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

18 ▷ On a $\chi_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$, par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^3 = \ker(A - \alpha I_n) \oplus \underbrace{\ker(A - \beta I_n)^2}_G$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A , G est stable par f alors $f|_G$ est trigonalisable et $\chi_{f|_G}(X) = (X - \beta)^2$.

Donc il existe une base (e_2, e_3) de G dans laquelle la matrice de $f|_G$ est de la forme $\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Soit e_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre α , on en déduit que dans la base (e_1, e_2, e_3) , la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Ainsi A et T sont semblables.

On a

$$\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta I_2 + \underbrace{a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

avec $N^2 = 0$, la formule du binôme donne

$$\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \beta^n I_2 + n\beta^{n-1}a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul par blocs donne

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & n\beta^{n-1}a \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

Et

$$\mathbf{e}^{tT} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\alpha)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} & at \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(t\beta)^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}^{tA}$ et $\mathbf{e}^{tT}$ sont semblables donc on a $\mathbf{e}^{tA} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ si et seulement si $\mathbf{e}^{tT} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Comme $|e^{t\alpha}| = e^{t\operatorname{Re}(\alpha)}$ donc $e^{t\operatorname{Re}(\alpha)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$.

De même $e^{t\operatorname{Re}(\alpha)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et $te^{t\operatorname{Re}(\alpha)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ si et seulement si, $\operatorname{Re}(\beta) < 0$.

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA} = 0_3 \iff \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \operatorname{Re}(\beta) < 0$$

Cas général

19 $\triangleright$ On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $f_A(t) = P\mathbf{e}^{tT}P^{-1}$, $\mathbf{e}^{tT}$ de diagonale $(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$. La continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ donne

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f_A(t) &= 0_n \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f_T(t) = 0_n \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda_k} = 0 \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0 \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

20 $\triangleright$ Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Les polynômes $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux donnent

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Ker}((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} F_\lambda$$

21 ▷ Décomposition de Dunford : Les sous espaces F_λ sont stables par A , car $(A - \lambda I_n)^{m_\lambda}$ et A commutent . Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Alors, $\nu_\lambda = u|_{F_\lambda} - \lambda \text{id}_{F_\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de F_λ . Soit $x \in \mathbb{C}^n$, x s'écrit d'une manière unique de la forme :

$$x = \sum_{x_\lambda \in F_\lambda} x_\lambda$$

Soit ν et δ les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ définies par

$$\nu(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \nu_\lambda(x_\lambda) \quad \text{et} \quad \delta(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda x_\lambda$$

Puisque $\nu_\lambda^{m_\lambda} = 0$ alors $\nu_\lambda^n = 0$, par suite $\nu^n = 0$, donc ν est nilpotent et δ est diagonalisable de plus on a : $u = \nu + \delta$ et $\nu\delta = \delta\nu$.

Soit D et N les matrices de δ et ν , respectivement, dans une base adaptée à la somme directe de la question **20** ▷, alors A est semblable à $D + N$ et il existe P inversible telle que, $A = P(D + N)P^{-1}$, $ND = DN$, D est diagonale, N est nilpotente et $\chi_A = \chi_D$.

22 ▷ On a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{tA} &= P \mathbf{e}^{t(D+N)} P^{-1} \\ &= P \mathbf{e}^{tD} \mathbf{e}^{tN} P^{-1} \quad (\text{car } ND = DN) \end{aligned}$$

Soit p l'indice de nilpotence de N , alors $\mathbf{e}^{tN} = \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} N^k$ donc

$$\|\mathbf{e}^{tN}\| = \sum_{k=0}^p \frac{|t|^k}{k!} \|N^k\| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^p)$$

Et on a

$$\mathbf{e}^{tD} = \text{diag}\left(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} E_{k,k}$$

donc

$$\|\mathbf{e}^{tD}\| \leq \sum_{k=1}^n e^{t \text{Re}(\lambda_k)} \|E_{k,k}\| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{\alpha t})$$

Finalement

$$\|\mathbf{e}^{tA}\| \leq \|P\| \cdot \|\mathbf{e}^{tD}\| \cdot \|\mathbf{e}^{tN}\| \cdot \|P^{-1}\| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^p e^{\alpha t})$$

La norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente $\|\cdot\|$ donc $\|\mathbf{e}^{tA}\|_\infty = \max_{i,j} |v_{i,j}(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^p e^{\alpha t})$.

Ainsi pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ $v_{i,j}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^p e^{\alpha t})$.

23 ▷ Si $\alpha < 0$, alors pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ $v_{i,j}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^p e^{\alpha t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_A(t) = 0_n$.

24 ▷ On suppose que les valeurs propres A ont toutes des parties réelles positives ou nulles.

Si $X = 0$ c'est évident.

Soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA} X$. On a $A = P(D + N)P^{-1}$, avec P inversible, $ND = DN$, D est

diagonale et N est nilpotente.

$$\mathbf{e}^{tA}X = P.\mathbf{e}^{t(D+N)}.P^{-1}X$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = 0 \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

$\mathbf{e}^{t(D+N)}$ est triangulaire de diagonale $(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$, si $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ alors

$$\mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = {}^t(*, \dots, *, e^{t\lambda_n}y_n)$$

ainsi $e^{t\lambda_n}y_n \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, or $\operatorname{Re}(\lambda_n) \geq 0$ donc $y_n = 0$, par suite $Y = {}^t(y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ et

$$\mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = {}^t(*, \dots, *, e^{t\lambda_{n-1}}y_{n-1}, 0)$$

ainsi par récurrence on montre que $y_1 = \dots = y_n = 0$, d'où $Y = 0$ et $X = 0$.

25 $\triangleright$ On a $\chi_A = P_S P_i P_n$, les polynômes P_S, P_i et P_n sont deux à deux premiers entre eux, par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$$

Les sous espaces E_s, E_i et E_n sont stable par u , l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Soit $X \in E$, on écrit $X = \begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} X_s \\ 0 \end{pmatrix} \in E_s$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \in E_i \oplus E_n$. A est semblable à une matrice de la forme $\operatorname{diag}(A_s, B)$ où A_s est la matrice de la restriction u à E_s et B la matrice de la restriction de u à $E_i \oplus E_n$. De plus $\chi_{A_s} = P_s$ et $\chi_B = P_i P_n$ donc $e^{tA_s} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

On a $A = P \operatorname{diag}(A_s, B) P^{-1}$, $P = \operatorname{diag}(P_s, Q)$ et $P^{-1} = \operatorname{diag}(P_s^{-1}, Q^{-1})$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{tA}X &= P \begin{pmatrix} e^{tA_s} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{tA_s} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_s \\ Y' \end{pmatrix}, \text{ avec } X'_s = P_s^{-1}X_s \text{ et } Y' = Q^{-1}Y \\ &= P \begin{pmatrix} e^{tA_s}X'_s \\ e^{tB}Y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $X \in E_s$, alors $Y' = 0$ et $e^{tA_s}X'_s \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA}X = 0$.

Réciproquement si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA}X = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tB}Y' = 0$ et les valeurs propres B ont toutes des parties réelles positives ou nulles, donc $Y' = 0$ et $X \in E_s$, ce qui montre que

$$E_s = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA}X = 0 \right\}.$$

26 $\triangleright$ A est semblable à une matrice de la forme $\operatorname{diag}(C, A_n)$ où A_n est la matrice de la restriction u à E_n et C la matrice de la restriction de u à $E_s \oplus E_i$. De plus $\chi_{A_n} = P_n$ donc $\operatorname{Sp}(A_n) = \{i\mu_1, \dots, i\mu_r\} \subset i\mathbb{R}$.

On a $A = P \operatorname{diag}(C, A_n) P^{-1}$, $P = \operatorname{diag}(R, P_n)$ et $P^{-1} = \operatorname{diag}(R^{-1}, P_n^{-1})$, par suite $\mathbf{e}^{tA} = P \operatorname{diag}(\mathbf{e}^{tC}, \mathbf{e}^{tA_n}) P^{-1}$.

On écrit $A_n = Q(D_n + N_n)Q^{-1}$ avec $D_n = \operatorname{diag}(i\mu_1, \dots, i\mu_r)$ et N_n nilpotente qui commute avec D_n .

Donc $e^{tA_n} = Q \mathbf{e}^{tD_n} \mathbf{e}^{tN_n} Q^{-1}$.

Soit p l'indice de nilpotence de N_n , alors $\mathbf{e}^{tN_n} = \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} N_n^k$, $\mathbf{e}^{tD_n} = \operatorname{diag}(e^{i\mu_1}, \dots, e^{i\mu_r})$.

Si $X \in E_n$ alors $X = \begin{pmatrix} 0 \\ X_n \end{pmatrix}$ et $e^{tA}X = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{tA_n}X_n \end{pmatrix}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} e^{tA_n}X_n &= Qe^{tN_n}e^{tD_n}Q^{-1}X_n \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} (QN_n^k e^{tD_n}Q^{-1}X_n) \end{aligned}$$

comme $\|QN_n^k e^{tD_n}Q^{-1}X_n\| = O(1)$ et $|t^k| = O((1+|t|)^p)$ (selon $|t| \geq 1$ ou $|t| \leq 1$) donc il existe $C > 0$

$$\|e^{tA}X\| \leq C((1+|t|)^p) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, si $X = \begin{pmatrix} X_s \\ X_i \\ X_n \end{pmatrix}$ et $\|e^{tA}X\| \leq ((1+|t|)^p) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

On a $A = P \operatorname{diag}(A_s, A_i, A_n) P^{-1}$ avec A_k est la matrice de la restriction u à E_k pour $k \in \{s, i, n\}$ et $P = \operatorname{diag}(P_s, P_i, P_n)$. Donc

$$\|e^{t \operatorname{diag}(A_s, A_i, A_n)} P^{-1}X\| \leq C'(1+|t|^p)$$

et

$$\|e^{tA_s}P_s^{-1}X_s\| \leq C'(1+|t|^p)$$

La décomposition de Dunford de A_s donne

$$e^{tA_s}X_s = \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} (QN_s^k e^{tD_n}Q^{-1}X_s)$$

Si $X_s \neq 0$, comme $\max_{\lambda \in Sp(A_s)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ alors $\|e^{tA_s}P_s^{-1}X_s\| \sim c|t|^q e^{-\beta t}$ avec $c > 0$, $\beta > 0$ et $q \leq p$, ce qui donne une contradiction quand $t \rightarrow -\infty$ donc $X_s = 0$. De même on montre $X_i = 0$. D'où le résultat.