MINES - PONTS 2020

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES II MP

MUSTAPHA LAAMOUM

m.laamoum@gmail.com

PARTIE A

1 . <u>Formule de Vandermonde :</u> Pour tous entiers m, n ,on obtient par identification des coefficients de $(X+1)^{n+m}$ et $(X+1)^n(X+1)^m$ de degré $p \in \{0, \dots, m+n\}$:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{n}\binom{n}{p-k}$$

en particulier pour $n = m = p$ on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

2 . <u>Formule de Stirling :</u>

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ce qui donne

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$$

3 . Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$et $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante dans $[k-1, k]$ ce qui donne :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}. \qquad (1)$$

et

$$\int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (2)$$

- Si $\alpha \in \left]0, 1\right[$, la relation (2) donne :

$$1 + \int_{2}^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

on a

$$\int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et

$$\int_{2}^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

- Si $\alpha \in]1,+\infty[$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ convergent, la relation (2) donne :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

4 . - Une intégration par partie donne pour $x \in [2,+\infty[$,

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \qquad (3)$$

- On a $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\ln(t)})$, $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{(\ln(t))^2})$ donc les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$,$t \mapsto \frac{1}{(\ln(t))^2}$ ne sont pas intégrables sur $[2,+\infty[$,de plus $\frac{1}{(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\ln(t)})$ donc

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)})$$

- La relation (3) s'écrit $I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + o(I(x))$ d'où

$$\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}}$$

5 . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ \forall x \in]-1,1[$, avec $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$.

Si $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{-1}{2}}{n} &= \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)...(\frac{-1}{2}-n+1)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1.3...(2n-1)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{(2n)!}{2.4...2n} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n.}$$

PARTIE B

Les fonctions F et G sont définies par :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n=0_d\right) x^n$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R=n) x^n$$

6 .

- On a pour tout n ,$0 \leq P\left(S_n=0_d\right) \leq 1$ et $0 \leq P(R=n) \leq 1$ donc $R_{cv}(\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n=0_d\right) x^n) \geq 1$ et $R_{cv}(\sum_{n=0}^{+\infty} P(R=n) x^n) \geq 1$.
- La somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$ est de classe C^{∞} sur $]-R, R[$ au moins .

  Donc F et G sont définies et de classe C^{∞} sur $]-1,1[$.
- Les événements $[R=n]=$ " la marche aléatoire $\left(S_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ revient en 0_d, pour la première fois à l'instant n " sont deux à deux disjoints, donc $\sum_{k=0}^{n} P(R=k)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n}[R=k]\right) \leq 1$.

  La série $\sum P(R=n)$ est à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, donc elle converge et $\sum(-1)^n P(R=n)$ converge absolument, d'où G est définie sur $[-1,1]$.

  De plus $\sup_{x \in[-1,1]}\left|\mathbb{P}(R=n) x^n\right|=P(R=n)$ et $\sum P(R=n)$ converge , donc $\sum P(R=n) x^n$ converge normalement donc converge uniformément sur $[-1,1]$, le théorème de continuité des séries de fonctions donne que G est continue sur $[-1,1]$.
- On a $[R=+\infty]=\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty}[R=k]}$, donc $[R \neq+\infty]=\bigcup_{k=0}^{+\infty}[R=k]$.

  Ecrivons $[R \neq+\infty]$ comme réunion croissante d'événements : $[R \neq+\infty]=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=0}^{n}[R=k]\right)$, le théorème de la limite monotone donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([R \neq+\infty]) & =\lim_{n \rightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}[R=k]\right) \\
& =\lim_{n \rightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R=k) \\
& =G(1)
\end{aligned}$$

- Soit $0<k \leq n$, la relation est triviale si $P(R=k)=0$,supposons $P(R=k) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left[S_n=0_d\right] \cap[(R=k)]\right)=\mathbb{P}(R=k) . \mathbb{P}\left(S_n=0_d \mid R=k\right)$$

  Si l'événement $[R=k]$ est réalisé alors $S_k=X_1+..+X_k=0_k$ donc

$$\mathbb{P}\left(S_n=0_d \mid R=k\right)=\mathbb{P}\left(X_{k+1}+..+X_n=0_{n-k}\right)$$

  les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi donc

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1}+..+X_n=0_{n-k}\right)=\mathbb{P}\left(X_1+..+X_{n-k}=0_{n-k}\right)$$

cette valeur commune est égale à $\displaystyle\sum_{\substack{(h_1,..,h_{n-k})\in X(\Omega)^{n-k}\\ h_1+..+h_{n-k}=0_d}} \prod_{i=1}^{n-k} P\left(X=h_i\right).$

ce qui donne

$$\mathbb{P}\left([S_n=0_d]\cap[(R=k)]\right)=\mathbb{P}(R=k).\mathbb{P}\left(S_{n-k}=0_d\right)$$

- La famille d'événements $([R=k])_{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}}$ constitue un système complet d'événements donc pour $n\in N^*$ on a

$$\mathbb{P}\left(S_n=0_d\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}}\mathbb{P}([S_n=0_d]\cap[(R=k)])$$

remarquons que si $k\geq n+1$ alors $P([S_n=0_d]\cap[(R=k)])=0$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_n=0_d\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([S_n=0_d]\cap[(R=k)])\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(R=k).P\left(S_{n-k}=0_d\right)\end{aligned}$$

- Soit $x\in\left]-1,1\right[$, on a

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\left(S_0=0_d\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(S_n=0_d\right)x^n\\ &= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(R=k).\mathbb{P}\left(S_{n-k}=0_d\right)\right)x^n\end{aligned}$$

d'après le produit de Cauchy de deux séries entières on a :

$$\boxed{F(x)=1+F(x)G(x)}$$

- On a $\lim\limits_{x\to1^-} G(x)=G(1)=P\left([R\neq+\infty]\right).$
Si $\mathbb{P}\left([R\neq+\infty]\right)\neq1$: comme G est continue alors $G(x)\neq1$ au voisinage de 1,ce qui donne $F(x)=\dfrac{1}{1-G(x)}$ et

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}F(x)=\frac{1}{1-\mathbb{P}\left([R\neq+\infty]\right)}}$$

Si $\mathbb{P}\left([R\neq+\infty]\right)=1$: pour tout $0<x<1$ on a $G(x)<\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(R=n)=1$ donc $F(x)=\dfrac{1}{1-G(x)}$ et

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}F(x)=+\infty.}$$

7 . Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de R^+ $R_{cv}\left(\sum c_kx^k\right)=1$ et $\sum c_k$ diverge.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, soit $A>0$ il existe $N>0$ vérifiant si $n\geq N$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k\geq A+1$.

Fixons $n \geq N$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} c_k$, donc pour $\varepsilon = 1$ il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in]1-\alpha, 1[$ alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k x^k - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leq \varepsilon$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \geq \sum_{k=0}^{n} c_k - 1 \geq A$, finalement :

$$\forall A > 0 \exists \alpha > 0, x \in]1-\alpha, 1[\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geq A$$

et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

8 .

- Si $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente :
  On sait que $\rho = R_{cv}(\sum P(S_n = 0_d) x^n) \leq 1$ donc $\rho = 1$, la question 9. donne

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

  de la question 8. on a $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} G(x) = 1 = G(1) = P([R \neq +\infty])$.

- Si $P([R \neq +\infty]) = 1$:
  Supposons $\sum P(S_n = 0_d)$ convergente alors F admet une limite finie en 1^-,mais question 8. donne $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ absurde, donc $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente.

- Pour $i \in N^*$, posons $A_i = [S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\}]$ et $Y_i = 1_{A_i}$ la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement A_i,on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_i = 1) &= \mathbb{P}(S_i \neq S_{i-1}, .., S_i \neq S_0) \\
&= \mathbb{P}(S_i - S_{i-1} \neq 0, .., S_i \neq 0) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{h_0\neq 0,\dots,h_{i-1}\neq 0} (S_i - S_{i-1} = h_{i-1}, \dots, S_i = h_0)\right)
\end{aligned}$$

comme les événements considérés sont incompatibles alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_i = 1) &= \sum_{h_0\neq 0,\dots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}(S_i - S_{i-1} = h_{i-1}, \dots, S_i = h_0) \\
&= \sum_{h_0\neq 0,\dots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}(X_i = h_{i-1}, X_i + X_{i-1} = h_{i-2}, \dots, X_i + .. + X_1 = h_0)
\end{aligned}$$

on remarque que

$$\left\{\begin{array}{l} X_i = h_{i-1} \\ X_i + X_{i-1} = h_{i-2} \\ \quad\vdots \\ X_i + .. + X_2 = h_1 \\ X_i + .. + X_1 = h_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_i = h_{i-1} \\ X_{i-1} = h_{i-2} - h_{i-1} \\ \quad\vdots \\ X_2 = h_1 - h_2 \\ X_1 = h_0 - h_1 \end{array}\right.$$

les X_i sont indépendantes et de même loi que X,ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y_i=1\right) &= \sum_{h_0\neq 0,\ldots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}\left(X_1=h_0-h_1,\ldots,X_{i-1}=h_{i-2}-h_{i-1},X_i=h_{i-1}\right)\\
&= \sum_{h_0\neq 0,\ldots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}\left(X_1=h_0-h_1\right)\ldots\mathbb{P}(X_{i-1}=h_{i-2}-h_{i-1}).\mathbb{P}(X_i=h_{i-1})\\
&= \sum_{h_0\neq 0,\ldots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}\left(X=h_0-h_1\right)\ldots\mathbb{P}(X=h_{i-2}-h_{i-1}).\mathbb{P}(X=h_{i-1})\\
&= \sum_{h_0\neq 0,\ldots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}\left(X_i=h_0-h_1\right)\ldots\mathbb{P}(X_2=h_{i-2}-h_{i-1}).\mathbb{P}(X_1=h_{i-1})
\end{aligned}$$

de plus on a

$$\left\{\begin{array}{l} X_i=h_0-h_1\\ X_{i-1}=h_2-h_1\\ \qquad\vdots\\ X_2=h_{i-2}-h_{i-1}\\ X_1=h_{i-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1=h_{i-1}\\ X_1+X_2=h_{i-2}\\ \qquad\vdots\\ X_1+..+X_{i-1}=h_1\\ X_1+..+X_i=h_0\end{array}\right.$$

d'où

$$\begin{aligned}
P\left(Y_i=1\right) &= \sum_{h_0\neq 0,\ldots,h_{i-1}\neq 0} \mathbb{P}\left(S_1=h_{i-1},\ldots,S_i=h_0\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_1\neq 0,\ldots,S_i\neq 0\right)\\
&= \mathbb{P}(R>i)
\end{aligned}$$

- Pour n dans N, N_n est le cardinal de $\{S_k,k\in\{0,\ldots,n\}\}$, N_n est une variable aléatoire finie donc admet une espérance . Remarquons que :

$$S_n\notin\{S_k,k\in\{0,\ldots,n-1\}\}\Leftrightarrow N_n=N_{n-1}+1$$

et

$$S_n\in\{S_k,k\in\{0,\ldots,n-1\}\}\Leftrightarrow N_n=N_{n-1}$$

ce qui donne

$$\boxed{N_n=N_{n-1}+Y_n}$$

par suite $E(N_n)=E(N_{n-1})+E(Y_n)$, de plus $E(Y_n)=P\left(Y_n=1\right)=P(R>n)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(N_n\right) &= \mathbb{E}(N_0)+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)
\end{aligned}$$

9 . On a $E\left(N_n\right)=1+\sum_{i=1}^{n}P(R>i)$, les événements $[R>i]$ sont décroissants , le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(R>i)=\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty}[R>i])=\mathbb{P}(R=+\infty)$$

le théorème de Cesàro donne

$$\boxed{\frac{\mathbb{E}\left(N_n\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(R=+\infty)}$$

PARTIE C

On a $p\in]0,1[, q=1-p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=1)=p \text{ et } \mathbb{P}(X=-1)=q$$

on pourra supposer $X(\Omega)=\{-1,1\}$.

10 . Pour $\omega\in\Omega$ $S_{2n+1}(\omega)$ est somme de $2n+1$ termes prenant la valeur 1 ou -1 donc $S_{2n+1}(\omega)=r-s$ avec $r+s=2n+1$, forcement $r\neq s$ et $S_{2n+1}(\omega)\neq 0$ par suite $P\left(S_{2n+1}=0\right)=0$.

D'autre part on a

$$[S_{2n}=0]=\bigcup_{\substack{I\subset[[1,2n]]\\ Card(I)=n}}\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\cap\bigcap_{i\notin I}[X_i=-1]\right)$$

c'est une réunion d'événements disjoints et les X_i sont indépendantes et de même loi que X donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_{2n}=0\right) &= \sum_{\substack{I\subset[[1,2n]]\\ Card(I)=n}} p^n q^n\\ &= \binom{2n}{n}p^n q^n\end{aligned}$$

11 . Pour $x\in]-1,1[$,on a $F(x)=1+F(x)G(x)$ et

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}p^n q^n x^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(4pqx^2\right)^n\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\end{aligned}$$

remarquer que $pq\leq\dfrac{1}{4}$. Donc

$$\boxed{G(x)=1-\sqrt{1-4pqx^2}}$$

.

On a $G(1)=P(R\neq+\infty)=1-P(R=+\infty)$ donc $P(R=+\infty)=\sqrt{1-4pq}=|2p-1|=|p-q|$.

$$\boxed{\mathbb{P}(R=+\infty)=|p-q|.}$$

$G(x)=1-\sqrt{1-4pqx^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{1/2}{n}\left(-4pqx^2\right)^n$ et $\binom{1/2}{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$ ce qui donne

$$G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\left(pqx^2\right)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(R=2n)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n\ ,\ \mathbb{P}(R=2n+1)=0}$$

12 . $p=q=\frac{1}{2}$, donc

$$\mathbb{P}(R=2n)=\frac{2}{n4^n}\binom{2n-2}{n-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$$

On a $E\left(N_n\right)=1+\sum_{i=1}^{n}P(R>i)$ et $P(R>i)=\sum_{n=i+1}^{+\infty}P(R=n)$

$P(R>2i+1)=P(R>2i)=\sum_{n=2i+2}^{+\infty}P(R=n)=\sum_{n=i+1}^{+\infty}P(R=2n)\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}(2i)^{1/2}}$, donc $P(R>n)\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}n^{1/2}}$

d'où

$$\boxed{\mathbb{E}\left(N_n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4n^{1/2}}{\sqrt{\pi}}}$$

PARTIE D

13 .

- Soient m et n deux entiers naturels tels que $m>n$.

$$a_n\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}\leq\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=1$$

donc

$$\boxed{a_n\leq\frac{1}{B_n}}$$

- On a

$$\begin{aligned}a_0\left(B_m-B_{m-n}\right)&=a_0\sum_{k=0}^{n-1}b_{m-k}\\&\geq\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_{m-k}\\&\geq 1-\sum_{k=n}^{m}a_kb_{m-k}\\&\geq 1-a_n\sum_{k=n}^{m}b_{m-k}\\&\geq 1-a_n\sum_{k=0}^{m-n}b_k\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{1\leq a_nB_{m-n}+a_0\left(B_m-B_{m-n}\right)}$$

14 . Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et $B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$ et $B_{m_n} - B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{=} B_n + o(B_n)$ et $a_0\,(B_m - B_{m-n}) = o(1)$. De la question précédente on a

$$\frac{1+o(1)}{B_n + o(B_n)} \leq a_n \leq \frac{1}{B_n}$$

ce qui donne

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}}$$

15 . On a $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$ donc $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$, on prend $m_n = n\ln n$ qui vérifie facilement les conditions de 17, donc

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}}$$

PARTIE E

16 . Soit $k \leq n$, par la même démarche de la question 11. on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R &> n-k) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0_d, ..., S_{n-k} \neq 0_d)\\ &= \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0_d, ..., S_n - S_k \neq 0_d)\\ &= \mathbb{P}(S_{k+1} \neq 0_d, ..., S_n \neq 0_d \mid S_k = 0)\end{aligned}$$

Posons $B_i = [S_i = 0_d] \cap [S_{i+1} \neq 0_d, ..., S_n \neq 0_d]$ pour $0 \leq i \leq n$.

Les $B_i$sont deux à deux disjoints et $\bigcup\limits_{i=0}^{n} B_i = \Omega$ (car pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $A(\omega) = \{i \in [[0,n]]\ \ , S_i = 0_d\}$ et non vide car contient 0,soit $k = \max(A(\omega))$ alors $\omega \in B_k$)

donc

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_i = 0_d)\mathbb{P}(S_{k+1} \neq 0_d, ..., S_n \neq 0_d \mid S_k = 0)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(S_k = 0_d\right)\mathbb{P}(R > n-k)\end{aligned}$$

17 . $P(X = (0,1)) = P(X = (0,-1)) = P(X = (1,0)) = P(X = (-1,0)) = \dfrac{1}{4}$.

Dans $[S_{2n} = 0]$ il y'a une symétrie, le nombre de fois ou $(0,1)$ est atteint et le même que $(0,-1)$, notons ce nombre $p \in [[0,n]]$, ainsi $(1,0)$et $(-1,0)$ sont atteint exactement $n-p$ fois ce qui donne :

$$[S_{2n} = 0] = \bigcup_{0\leq p\leq n} \bigcup_{\substack{I\subset[[1,2n]]\\ Card(I)=2p}} [C_I \cap D_I]$$

avec

$$C_I = \bigcup_{\substack{J\subset I\\ Card(J)=p}} \left(\bigcap_{i\in J} [X_i = (0,1)] \cap \bigcap_{i\in I\setminus J} [X_i = (0-1)]\right)$$

et

$$D_I = \bigcup_{\substack{J\subset \overline{I} \\ Card(J)=n-p}} \left(\bigcap_{i\in J} [X_i = (1,0)] \cap \bigcap_{i\in \overline{I}\setminus J} [X_i = (-1,0)] \right)$$

par indépendance des X_i on a

$$\mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) = \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{\substack{I\subset [[1,2n]] \\ Card(I)=n}} \mathbb{P}(C_I)\mathbb{P}(D_I)$$

et $P(C_I)P(D_I) = \displaystyle\sum_{\substack{J\subset I \\ Card(J)=p}} \left(\frac{1}{4}\right)^{card(I)} \times \sum_{\substack{J\subset \overline{I} \\ Card(J)=p}} \left(\frac{1}{4}\right)^{card(\overline{I})} = \frac{1}{4^{2n}}\binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) &= \sum_{0\leq p\leq n} \sum_{\substack{I\subset [[1,2n]] \\ Card(I)=n}} \frac{1}{4^{2n}}\binom{n}{p}\binom{n}{n-p} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{0\leq p\leq n} \binom{n}{p}\binom{n}{n-p} \sum_{\substack{I\subset [[1,2n]] \\ Card(I)=n}} 1 \\ &= \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n} \sum_{0\leq p\leq n} \binom{n}{p}^2 \end{aligned}$$

la formule de Vandermonde donne

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_{2n} = 0_2\right) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}}$$

18 . De la question 19. on a

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(S_{2k} = 0_d\right)\mathbb{P}(R > 2n-2k)$$

et $P\left(S_{2n} = 0_2\right) = \dfrac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi n}$, la question 18. donne $P(R > 2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi \ln n}$, comme $P(R > 2n) = P(R > 2n+1)$ alors $P(R > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi \ln n}$.

On sait que $E\left(N_n\right) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(R > i)$, la série $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ est divergente donc $E\left(N_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\pi \ln k}$, par comparaisons avec une intégrale on obtient $E\left(N_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi} I(n)$ d'où

$$\boxed{\mathbb{E}\left(N_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi \ln n}}$$

FIN DU PROBLÈME