Centrale-Supélec 2016 [1]
PC - Mathématiques 1

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$. Le terme $\Gamma(x)$ est bien défini si et seulement si la fonction f_x est intégrable. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_x(t) = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$. Au voisinage de 0^+, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ donc f_x est intégrable en 0 si et seulement si $x > 0$ par critère de comparaison à une intégrale de Riemman. Donc $\Gamma(x)$ est bien défini si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Soit $x > 0$. Posons u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition et de plus $uv' = f_{x+1}$ et $u'v = -xf_x$ donc les intégrales $\int_0^{+\infty} uv'$ et $\int_0^{+\infty} u'v$ convergent. Nous pouvons donc effectuer une intégration par partie sur $]0, +\infty[$: $\int_0^{+\infty} uv' = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'v$. Comme $u(t)v(t) \to 0$ en $+\infty$ et en 0, le terme crochet est nul et $\int_0^{+\infty} f_{x+1} = -\int_0^{+\infty} -xf_x$ soit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots x\Gamma(x).}$$

En particulier, pour $x = 1$ nous avons $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1)$ avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

3. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^4}$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et ce sont des $o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$ donc elles sont intégrables.

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t \text{ sont bien définies.}}$$

Dans la première intégrale, effectuons le changement de variable $u : t \mapsto t^2$ qui réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Nous avons $u = t^2$ d'où $\sqrt{u} = t$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$ d'où $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$. De même, avec le changement de variable $u = t^4$ on montre que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{4u^{3/4}} = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$.

$$\boxed{\text{Nous avons } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \text{ et } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{4}).}$$

I.B

1. Soient $t > 0$ et $x \in [a, b]$. Les termes t^a et t^b étant positifs, nous avons toujours $\max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$. De plus, si $t \geqslant 1$ alors $t^x \leqslant t^b$. Et si $t < 1$ alors $t^x \leqslant t^a$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0 \text{ et } x \in [a,b] \text{ nous avons } t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b.}$$

1. Vous pouvez envoyez vos remarques ainsi que les irréductibles erreurs et fautes de frappes qui se seront glissées dans ce document à l'adresse suivante pierre-amaury.monard@laposte.net. L'auteur vous en sera reconnaissant.

2. Montrons que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment.
Posons $\gamma : [a,b]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\gamma(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln t}}{t}\mathrm{e}^{-t}$. Alors γ est infiniment dérivable par rapport à la variable x et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^k \gamma}{\partial^k x}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\frac{\partial^k \gamma}{\partial^k x}$ est continue en t et de plus, $\left|\frac{\partial^k \gamma}{\partial^k x}(x,t)\right| \leqslant g_k(t) := |\ln t|^k \frac{t^a+t^b}{t}\mathrm{e}^{-t}$. La fonction g_k est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$. En $+\infty$, $g_k(t) = o(\frac{1}{t^2})$ et en 0^+, $g_k(t) \sim \frac{|\ln t|^k}{t^{1-a}}$ donc g_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \gamma(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dérivées successives données par $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k \gamma}{\partial^k x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ sur le segment $[a,b]$. Ceci est vrai pour tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } x > 0,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

I.C

1. Pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Donc $G''(x) \geqslant 0$. De plus, l'intégrande est une fonction positive, continue, non identiquement nulle donc l'intégrale est non nulle. D'où $\Gamma''(x) > 0$ et Γ' est une fonction strictement croissante. Elle s'annule au plus une fois.
On sait déjà que $\Gamma(1) = 1$. Nous avons également $\Gamma(2) = 1! = 1$. La fonction Γ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, d'après le théorème de Rolle il existe $\xi \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \xi \text{ tel que } \Gamma'(\xi) = 0. \text{ Ce réel vérifie } 1 < \xi < 2.}$$

2. La fonction Γ' étant (strictement) croissante et s'annulant en ξ elle est négative sur $]0,\xi[$ et positive sur $]\xi,+\infty[$ ce qui montre que Γ est décroissante sur $]0,\xi]$ et croissante sur $[\xi,+\infty[$.
La fonction Γ est croissante au voisinage de $+\infty$ et non bornée au voisinage de $+\infty$ car $\Gamma(n+1) = n! \to +\infty$ donc diverge vers $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$
Au voisinage de 0, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}$ car $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ quand $x \to 0^+$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.

Pour le graphe de Γ, il faut le tracer convexe car $\Gamma'' > 0$.

II Une transformée de Fourier

II.A

1. Soit $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{itx}$. La fonction f est indéfiniment dérivable par rapport à la variable x, de dérivées partielles données par $\frac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t) = (it)^k \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{itx}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t)\right| \leqslant g_k(t) := t^{k-3/4}\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions g_k sont continues sur $]0,+\infty[$, $g_k(t) = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$ et $g_k(t) \sim \frac{1}{t^{3/4-k}}$ en 0^+ donc g_k est intégrable sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dérivées successives données par $F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.
De plus, $F(0) = \int_0^{+\infty} t^{-3/4}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/4)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et } F^{(k)} = \int_0^{+\infty} (it)^k t^{-3/4}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \text{ Et } F(0) = \Gamma(1/4).}$$

II.B

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_{n,x}(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\frac{(ixt)^n}{n!}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} u_{n,x}(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrons que pour x proche de 0, nous pouvons échanger l'intégrale et la somme. D'après le théorème d'interversion $\int - \sum$, il suffit de montrer que la série $\sum \int |u_{n,x}|$ converge. Posons $I_n(x) :=$

$\int_0^{+\infty} |u_{n,x}(t)|\, \mathrm{d}t$. Alors $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-3/4} \frac{(|x|t)^n}{n!} = c_n \frac{|x|^n}{n!}$ avec $c_n := \Gamma(n+1-3/4)$. Pour $n \geqslant 2$, nous avons $n+1-3/4 \geqslant 2$ donc $c_n \leqslant \Gamma(n+1) = n!$ par croissance de la fonction Γ sur $[2, +\infty[$. Donc $0 \leqslant I_n(x) \leqslant |x|^n$. Et la série $\sum I_n(x)$ converge pour $|x| < 1$.

Soit donc $|x| < 1$. Alors, $F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_0^{+\infty} u_{n,x}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_{n,x}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_0^{+\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!}$. De plus, $c_n = \Gamma(n+1/4) = (n-1+1/4) \dots (1+1/4).1/4\Gamma(1/4) = \prod_0^{n-1}(k+1/4)c_0$.

Posons $b_n := \frac{c_n i^n}{n!}$. Alors $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{c_{n+1}}{c_n(n+1)} = \frac{\Gamma(n+1+1/4)}{\Gamma(n+1/4)(n+1)} = \frac{n+1/4}{n+1} \to 1$. D'après le critère de D'Alembert, la série entière $\sum b_n x^n$ admet $R = 1$ comme rayon de convergence.

$$\boxed{\text{Pour tout } |x| < 1,\ F(x) = \sum_0^{+\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!} \text{ avec } c_n = \Gamma(n+1/4).\ c_n = \prod_0^{n-1}(k+1/4)c_0 \text{ et } RC\left(\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!}\right) = 1.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{U}$. Alors, $\left|c_n \frac{(ix)^n}{n!}\right| = \frac{\Gamma(n+1/4)}{n!} \sim \frac{\sqrt{2\pi}(n+\frac{1}{4})^{(n-1/2)}\mathrm{e}^{-n-1/4}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{-1/4}(1+\frac{1}{4n})^n \frac{(n+1/4)^{-1/2}}{n^{1/2}} \sim \frac{1}{n}$ d'après la formule de Sterling [2] et $(1+\alpha/n)^n \sim \mathrm{e}^{\alpha}$. Donc la série $\sum \left|c_n \frac{(ix)^n}{n!}\right|$ est divergente.

$$\boxed{\text{Pour } |x| = 1, \text{ la série } \sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} \text{ ne converge pas absolument.}}$$

3. Les coefficients c_n étant réels, nous avons : $F(x) = \underbrace{\sum_0^{+\infty} (-1)^n c_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{=R(x)} + i \underbrace{\sum_0^{+\infty} (-1)^n c_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=I(x)}$. Le développement limité en 0 d'une série entière étant obtenu par troncature, on obtient, $R(x) = c_0 - \frac{c_2}{2}x^2 + o(x^3)$ et $I(x) = c_1 x - \frac{c_3}{6}x^3 + o(x^4)$. Sachant $c_n = \prod_0^{n-1}(k+1/4)c_0$.

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, } R(x) = c_0(1 - \tfrac{5}{32}x^2) + o(x^3) \text{ et } I(x) = c_0(\tfrac{x}{4} - \tfrac{15x^3}{128}) + o(x^4).}$$

II. C

1. D'après la question $II.A$ on sait que F est dérivable de dérivée $F'(x) = \int_0^{+\infty} i t^{1/4} \mathrm{e}^{t\alpha(x)}$ avec $\alpha(x) = -1 + ix$. Posons $u(t) = t^{1/4}$ et $v(t) = \frac{\mathrm{e}^{t\alpha(x)}}{\alpha(x)}$. Ce sont des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $u'(t) = \frac{t^{-3/4}}{4}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{t\alpha(x)}$. Les fonctions uv' et $u'v$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ de terme crochet $[uv]_0^{+\infty}$ nul donc par IPP : $F'(x) = i\int_0^{+\infty} uv' = -i \int_0^{+\infty} u'v = \frac{-i}{4\alpha(x)} \int_0^{+\infty} t^{-3/4} \mathrm{e}^{-t+ixt}\, \mathrm{d}t = \frac{-i}{4\alpha(x)} F(x)$. Nous posons donc $A(x) = \frac{i}{4(-1+ix)} = \frac{1}{4(x+i)}$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ vérifie } F' + AF \text{ avec } A(x) = \tfrac{1}{4(x+i)}.}$$

2. La fonction F est de la forme $F = C\mathrm{e}^{-B}$ où $C \in \mathbb{C}$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une primitive de A. Nous avons $A(x) = \frac{1}{4}.\frac{1}{x+i} = \frac{1}{4}.\frac{x-i}{1+x^2} = \frac{1}{8}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{i}{4}.\frac{1}{1+x^2}$. Une primitive de A est donnée par $B : x \mapsto \frac{1}{8}\ln(1+x^2) - \frac{i}{4}\arctan(x)$. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $F(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\ln(1+x^2) + \frac{i}{4}\arctan(x)}$. Pour $x = 0$ nous obtenons $F(0) = C = c_0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } |x| < 1,\ F(x) = \frac{\Gamma(1/4)}{(1+x^2)^{1/8}} \mathrm{e}^{\frac{i}{4}\arctan x}}$$

2. La formule admise par l'énoncé est une formule de Sterling généralisée. Pour $x > -1$, définissons la factorielle réelle par $x! := \Gamma(x+1)$. cette définition est cohérente avec la définition de la factorielle sur les entiers naturels. La formule de Sterling $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n}$ se généralise à $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} \mathrm{e}^{-x}$. Sachant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on en déduit l'équivalent admis par le sujet.

III Autour de la loi de Poisson

III. A

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons $\mathbb{P}(X = k)t^k = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(t\lambda)^k}{k!}$. Il s'agit d'une série exponentielle donc convergente. Ainsi, d'après la formule de transfert la variable aléatoire t^X admet une expérance et $\mathbb{E}[t^X] = \sum_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(t\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$ d'où $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.}$$

2. La fonction G_X est une série entière de rayon de convergence $+\infty$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives se calculent en dérivant terme à terme. En particulier, $G'_X(1) = \sum_1^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)1^{k-1} = \mathbb{E}X$ et $G''_X(1) = \sum_2^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)1^{k-2} = \mathbb{E}[X(X-1)]$.
Par ailleurs, $G'_X(1) = \lambda$ et $G''_X(1) = \lambda^2$ (obtenues en dérivant $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$). On en déduit $\mathbb{E}X = \lambda$ puis $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. En effet $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$ d'après la formule de König-Huygens.

$$\boxed{\mathbb{E}X = \mathrm{Var}(X) = \lambda,\ \mathrm{Var}(X) = \lambda \text{ et } \sigma_X = \sqrt{\lambda}.}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires t^X et t^Y admettent une espérance donc t^{X+Y} aussi. De plus, $G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X t^Y] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y]$ car t^X et t^Y sont des variables aléatoires indépendantes d'après le lemme des coalitions. Donc $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$. On reconnaît la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Or la série génératrice est caractéristique de la loi donc $X + Y$ a pour loi une $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Le fait que G_X est caractéristique de la loi de X [3] vient du fait que les coefficient (a_n) d'une série entière $f = \sum a_n x^n$ sont reliés à f par la formule $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).}$$

III.B

1. D'après la question précédente et par récurrence immédiate :

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda).}$$

2. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ admettent un moment d'ordre deux donc S_n et T_n aussi.
D'après la question $III.A.2$), $\mathbb{E}S_n = \mathrm{Var}(S_n) = n\lambda$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}T_n = 0$. De plus, $\mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{Var}(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n\lambda} = 1$.

$$\boxed{\mathbb{E}S_n = n\lambda,\ \sigma_{S_n} = \sqrt{n\lambda},\ \mathbb{E}T_n = 0 \text{ et } \sigma_{T_n} = 1.}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $c(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Soit $c \geqslant c(\varepsilon)$.
Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à T_n (qui est centrée-réduite) : $\mathbb{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{c(\varepsilon)^2} = \varepsilon$.

$$\boxed{\text{Pour tout } c \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\ \mathbb{P}(|T_n] \geqslant c| \leqslant \varepsilon.}$$

3. C'est-à-dire que X et Y ont la même loi si seulement si $G_X = G_Y$.

III.C

1. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est M-lipschitzienne, il suffit de montrer que sa dérivée est bornée par M.
La fonction f est dérivable de dérivée donnée par $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des limites (nulles) en $\pm\infty$ donc est bornée. Soit $M > 0$ tel que $|f'| \leqslant M$. Alors f est M-lipschitzienne.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est lipschitzienne.}}$$

2. *a)* Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors $\left|hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^{x+h}(f(x) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+h} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} M\,|x - t| = M\frac{h^2}{2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } h > 0,\ \left|hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{h^2}{2}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que I_n est non vide. Écrivons $I_n = [\![p, q]\!]$ et posons
$\Delta_n := \left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.
Alors $\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=p}^{q}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in I_n}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.
D'où $\Delta_n = \left|\sum_{k\in I_n}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}f(x_{k,n}) - \sum_{k\in I_n}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k\in I_n}\left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}f(x_{k,n}) - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$.
En remarquant que $x_{k+1,n} = x_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$, nous pouvons utiliser l'inégalité prouvée à la question précédente avec $x = x_{k,n}$ et $h = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$.
D'où $\Delta_n \leqslant \sum_{k\in I_n}\frac{M}{2n\lambda} = \frac{\ell(I_n)M}{2n\lambda}$ où $\ell(I_n) = q - p$ désigne la longueur de l'intervalle d'entiers I_n.
Or $I_n = [a\sqrt{n\lambda} + n\lambda,\ b\sqrt{n\lambda} + n\lambda] \cap \mathbb{N}$ donc $\ell(I_n) \leqslant (b - a)\sqrt{n\lambda}$.
D'où $\Delta_n \leqslant \frac{M(b-a)}{2\sqrt{n\lambda}}$.
On obtient un majorant en $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, qui tend donc vers 0 avec n (ouf !).

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } I_n \text{ est non vide, } \left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.}$$

où $C = \frac{M(b-a)}{\sqrt{\lambda}}$.

c) La question est délicate car quand n varie, l'intervalle I_n varie aussi...et donc p et q aussi. En réalité il eut fallu noter p_n et q_n les bornes de I_n. Nous allons montrer que $x_{p_n,n} \to a$ et $x_{q_n+1,n} \to b$ quand $n \to +\infty$ ce qui établiera la limite voulue grâce au théorème des gendarmes.
D'après la définition de p_n nous avons : $a\sqrt{n\lambda}+n\lambda \leqslant p_n < a\sqrt{n\lambda}+n\lambda+1$ d'où $a \leqslant x_{p_n,n} < a+\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$.
En effet, lorsque k parcourt I_n, $x_{k,n}$ parcourt l'intervalle $[a, b]$ en faisant des sauts de longueur $\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{p_n,n} = a$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{q_n,n} = b$ et comme $x_{q_n+1,n} = x_{q_n,n} + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{q_n+1,n} = b$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{x_{p_n,n}}^{x_{q_n+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Par passage à la limite[4] dans l'inégalité $\Delta_n \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$ on en déduit que l'expression $\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})$ admet une limite finie et que celle-ci vaut $\int_a^b f$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f.}$$

3. Question vraiment dure à rédiger proprement car n et k varient simultanément. Il faut arriver à écrire $k \sim n\lambda$ quand $n \to +\infty$. Je préfère sauter cette question...

4. D'après la question précédente, $\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) \leqslant \sum_{k\in I_n}\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})$.
D'après la question *III.B.2.c)*, $(1-\varepsilon)\int_a^b f \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) \leqslant (1+\varepsilon)\int_a^b f$ APCR donc $\frac{(1-\varepsilon)^3}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f \leqslant \sum_{k\in I_n}\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^3}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f$ APCR. Nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k\in I_n}\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f$.

4. En $+\infty$, la condition $I_n \neq \emptyset$ est toujours vérifiée.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{n\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-n\lambda} = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x.}$$

[5] [6]

5. Par définition de T_n, $\mathbb{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant b) = \mathbb{P}(n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant S_n \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}) = \mathbb{P}(S_n \in I_n) = \sum_{k\in I_n} \mathbb{P}(S_n = k)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \sum_{k\in I_n} \mathbb{P}(S_n = k).}$$

6. Posons $\tilde{f} := \frac{f}{\sqrt{2\pi}}$. La fonction $\tilde{f}$ est une densité de la loi normale cenrtée réduite. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \sum_{k\in I_n} \mathrm{e}^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ car S_n suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \int_a^b \tilde{f}$. En prenant $b = +\infty$ [7] [8] on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \geqslant a) = \int_a^{+\infty} \tilde{f}$. En prenant $a = b$ on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n = a) = \int_a^a \tilde{f} = 0$. Par différence d'évènements, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n > a) = \int_a^{+\infty} \tilde{f}$. Et avec $a = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \leqslant b) = \int_{-\infty}^b \tilde{f}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \geqslant a) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n > a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n = a) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \leqslant b) = \int_{-\infty}^b \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x.}$$

III.D

1. Avec $a = -\infty$ et $b = +\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(-\infty < T_n < +\infty a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x$. Or la suite $(\mathbb{P}(-\infty < T_n < +\infty))_n$ est la suite contante égale à 1 donc :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.}$$

2. Suivons l'indication de l'énoncé : $\mathrm{e}^{-n\lambda} A_n = \sum_0^{\lfloor n\lambda \rfloor} \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_n \leqslant \lfloor n\lambda \rfloor) = \mathbb{P}(S_n \leqslant n\lambda) = \mathbb{P}(T_n \leqslant 0) \to \int_{-\infty}^0 \tilde{f} = \frac{1}{2}$ car la fonction $\tilde{f}$ est paire donc sa masse se répartit équitablement entre $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$. De même, $\mathrm{e}^{-n\lambda} B_n = \mathbb{P}(S_n \geqslant \lfloor n\lambda \rfloor) = \mathbb{P}(T_n \geqslant 0) + \alpha_n$ avec $\alpha_n = 0$ si $n\lambda = \lfloor n\lambda \rfloor$ et $\alpha_n = \mathbb{P}(T_n = \frac{\lfloor n\lambda \rfloor - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}})$ sinon. Pour $\varepsilon > 0$ et n assez grand, on a $\alpha_n \leqslant \mathbb{P}(-\varepsilon \leqslant T_n \leqslant 0)$ donc $\alpha_n \to 0$. Et $\mathrm{e}^{-n\lambda} B_n \to \frac{1}{2}$.

$$\boxed{A_n \sim B_n \sim \frac{1}{2} \mathrm{e}^{n\lambda}.}$$

3. Pour $\lambda < 1$, $\mathrm{e}^{-n\lambda} C_n = \mathbb{P}(0 \leqslant S_n \leqslant n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \mathbb{P}(T_n \leqslant \frac{n(1-\lambda)}{\sqrt{n\lambda}})$. Comme $\frac{n(1-\lambda)}{\sqrt{n\lambda}} \to +\infty$, pour tout réel $x >> 1$, on a $\mathbb{P}(T_n \leqslant \frac{n(1-\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}) \geqslant \mathbb{P}(T_n \leqslant x)$ APCR. Si on choisit x tel que $\mathbb{P}(T_n \leqslant x) \geqslant 1 - \varepsilon$ on montre ainsi que $1 \geqslant \mathrm{e}^{-n\lambda} C_n \geqslant 1 - \varepsilon$ APCR et $\mathrm{e}^{-n\lambda} C_n \to 1$. De même avec $\mathrm{e}^{-n\lambda} D_n = \mathbb{P}(S_n > n)$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda < 1,\ \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda} C_n = 1. \text{ Si } \lambda > 1,\ \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda} D_n = 1.}$$

5. Nous venons de redémontrer le TCL dans le cas de v.a iid de loi de Poisson.
6. Il y a une erreur dans l'énoncé ; il manque un terme n dans l'exponentielle de la formule de la question.
7. Un simple « passage à la limite » en faisant tendre b vers $+\infty$ nécessite une rédaction loin d'être triviale. Écrire « on fait tendre b vers $+\infty$ est donc délicat voire faux.
8. Nous pouvons refaire toutes les questions précédentes avec $b = +\infty$ sans rien changer aux preuves.

III. E

1. Posons $I_n := (n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\lambda}(1-\frac{t}{n\lambda})^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Soit $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f_n(t) = (1-\frac{t}{n\lambda})^n \mathrm{e}^t \mathbb{1}_{0\leqslant t\leqslant n\lambda}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_n(t)\to \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}\mathrm{e}^t\mathbb{1}_{t\geqslant 0}$. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(t) := \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}\mathrm{e}^t\mathbb{1}_{t\geqslant 0}$ de sorte que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f.

   Nous aimerions échanger limite et intégrale ; pour cela nous avons besoin du théorème de convergence dominé. Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $|f_n(t)| \leqslant \mathbb{1}_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{t}{n\lambda})}\mathrm{e}^t \leqslant f(t)$ par concavité de la fonction logarithme. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (non nulle sur $\mathbb{R}_+$ uniquement, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$ car $1-1/\lambda < 0$) donc d'après le TCD, $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f = \frac{\lambda}{1-\lambda}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{1-\lambda}.}$$

2. La formule de Taylor avec reste intégral appliqué à la fonction exponentielle entre les points 0 et $n\lambda$ à l'ordre n donne : $\mathrm{e}^{n\lambda} = \sum_0^n \frac{(n\lambda)^k}{k!} + \underbrace{\int_0^{n\lambda}\frac{(n\lambda-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}_{=\frac{(n\lambda)^n}{n!}I_n}$. Par ailleurs, $\mathrm{e}^{n\lambda} = \sum_0^n\frac{(n\lambda)^k}{k!} + D_n$ d'où

   $D_n = \frac{(n\lambda)^n}{n!}I_n \sim \frac{(n\lambda)^n}{n!}\frac{\lambda}{1-\lambda}$.

$$\boxed{\text{Pour } \lambda<1,\ D_n \sim \frac{(n\lambda)^n}{n!}\frac{\lambda}{1-\lambda}.}$$

III. F

On choisit $r = n\lambda$. Intégrons par partie n fois l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{(n\lambda-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ en dérivant le terme polynomiale (pour le faire disparaître *in fine*). Nous obtenons : $\int_{-\infty}^0\frac{(n\lambda-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{(n\lambda)^n}{n!}+\frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{(n\lambda)^1}{1!}+\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = C_n$. Donc $C_n = \frac{(n\lambda)^n}{n!}\int_{-\infty}^0 h_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $h_n : \mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$ définie par $h_n(t) = \left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)^n\mathrm{e}^t$. La suite de fontion (h_n) converge simplement vers la fontion h où $h : \mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$ est définie par $h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\lambda}}\mathrm{e}^t$. Les fonctions h_n sont continues et $|h_n|\leqslant h$ qui est intrégrable sur $\mathbb{R}_-$ (car $\frac{\lambda-1}{\lambda}>0$) donc d'après le TCD, $\int_{\mathbb{R}_-}h_n \to \int_{\mathbb{R}_-}h = \frac{\lambda}{\lambda-1}$.

$$\boxed{\text{Pour } \lambda>1,\ C_n \sim \frac{(n\lambda)^n}{n!}\frac{\lambda}{\lambda-1}.}$$

$* * *$ FIN $* * *$
