Concours Communs Polytechniques 2018

Épreuve de mathématiques PSI, quatre heures

Corrigé

Dans tout ce document, on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\Delta(X^k) = kX^k$.
2. On doit démontrer l'identité :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P). \tag{$*$}$$

Comme $P \mapsto XP''$ et $\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})$ sont des applications linéaires, il suffit de démontrer $(*)$ sur la famille génératrice $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$. Or :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(X^k) = (k-1)\Delta(X^k) = k(k-1)X^k = X^2 \times k(k-1)X^{k-2},$$

donc $(*)$ est vérifiée sur une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$: elle est vraie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

3. Rappelons que la famille $(X^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. Comme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$, par linéarité on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
4. D'après la question **Q 1**, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_n}(\Delta_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & n \end{pmatrix}.$$

On remarque que Δ_n est diagonalisable, et la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de vecteurs propres de Δ_n.

5. D'après l'identité $(*)$, on a :

$$\Phi = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id}) + a\Delta = \Delta^2 - \Delta + a\Delta = \Delta^2 + (a-1)\Delta,$$

d'où le résultat. Comme Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, c'est aussi le cas de Δ^2, et par suite de Φ qui en est une combinaison linéaire.

6. Nous avons vu, dans la question **Q 3**, que Δ laisse stable $\mathbb{R}_n[X]$, donc Δ^2 également, ainsi que leur combinaison linéaire Φ. Par conséquent Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté Φ_n.
7. Nous avons vu, dans la question **Q 4**, que la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, que nous notons ici D, est diagonale. La matrice de Φ_n dans cette même base est donc $D^2+(a-1)D$, qui est également diagonale. Ceci démontre que Φ_n est diagonalisable, et la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de vecteurs propres de Φ_n.

8. On a : $\varphi = \Phi + b\mathrm{Id}$. Comme Φ et $b\mathrm{Id}$ laissent stable $\mathbb{R}_n[X]$, il en est de même de leur somme φ, qui induit donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ noté φ_n, et on a : $\varphi_n = \Phi_n + b\mathrm{Id} = \Delta^2 + (a-1)\Delta + b\mathrm{Id}$.
9. Reprenant la question **Q 4** et l'identité $\varphi_n = \Delta^2 + (a-1)\Delta + b\mathrm{Id}$, on a :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = k^2 + (a-1) \cdot k + b$.

10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, qu'on écrit sous la forme : $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors, sans faire pour le moment d'hypothèse sur les racines de l'équation $s^2 + (a-1)s + b = 0$, on a :

$$P \in \ker(\varphi_n) \iff \varphi_n(P) = 0 \iff \mathrm{M}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k a_k = 0.$$

d'après la matrice de φ_n obtenue dans la question précédente. Comme, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\lambda_k = k^2 + (a-1) \cdot k + b$, on peut décrire le noyau de φ_n ainsi :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \ker(\varphi_n) \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ (k^2 + (a-1) \cdot k + b)a_k = 0. \tag{†}$$

À présent, puisque l'énoncé nous y invite, supposons l'existence de deux solutions entières $m_1, m_2 \in [\![0, n]\!]$ à l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

On a donc $m_1^2 + (a-1)m_1 + b = m_2^2 + (a-1)m_2 + b = 0$. Comme cette équation est polynomiale et de degré 2, il n'y a dans ce cas pas d'autre solution ; on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ distinct de m_1 et m_2, on a $k^2 + (a-1)k + b \neq 0$ et donc, d'après (†) :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \ker(\varphi_n) \iff \begin{cases} \forall k \in [\![0, n]\!] \setminus \{m_1, m_2\},\ a_k = 0 \\ (m_1^2 + (a-1)m_1 + b)a_{m_1} = 0 \\ (m_2^2 + (a-1)m_2 + b)a_{m_2} = 0 \end{cases} \iff \forall k \in [\![0, n]\!] \setminus \{m_1, m_2\},\ a_k = 0,$$

les deux dernières égalités étant vraies indépendamment de a_{m_1} et a_{m_2}. En résumé, $P \in \ker(\varphi_n)$ si et seulement si P est combinaison linéaire de X^{m_1} et X^{m_2}, c'est-à-dire :

$$\ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^{m_1}, X^{m_2}\right).$$

(*On peut procéder autrement : la matrice de φ_n étant diagonale, avec ici deux coefficients diagonaux, on observe aisément qu'on peut l'échelonner avec $n-1$ pivots non nuls et 2 nuls, donc on a immédiatement* $\dim(\ker(\varphi_n)) = 2$*, la nullité de deux colonnes permettant d'en déduire une famille génératrice ; de même pour la question suivante*)

11. La description de $\ker(\varphi_n)$ donnée dans (†) reste valable. Si, cette fois-ci, il existe une et une seule racine entière $m \in [\![0, n]\!]$ à l'équation (1), alors :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \ker(\varphi_n) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!] \setminus \{m\},\ a_k = 0,$$

donc $P \in \ker(\varphi_n)$ si et seulement si P est proportionnel à X^m, c'est-à-dire :

$$\ker(\varphi_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^m\right).$$

12. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\varphi_n(P) = 0$, alors $\varphi(P) = 0$ en particulier, donc $\ker(\varphi_n) \subseteq \ker(\varphi)$. Ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \ker(\varphi_n) \subseteq \ker(\varphi)$ (même si ce fait ne nous importe pas tant que cela ici, notons que cette union est bien un espace vectoriel, grâce à l'inclusion successive des noyaux). Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\varphi(P) = 0$, alors $\varphi_{\deg(P)}(P) = 0$ et donc $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi_{\deg(P)}) \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \ker(\varphi_n)$. Donc :

$$\ker(\varphi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(\varphi_n)$$

(*Cette description n'est peut-être pas la plus simple, mais elle est en quelque sorte intrinsèque*).
D'après les deux questions qui précèdent, soit l'équation (1) n'a pas de solution entière positive, auquel cas $\ker(\varphi_n) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\ker(\varphi) = \{0\}$; soit, en notant m' la plus grande solution entière de (1), on a $\ker(\varphi) = \ker(\varphi_{m'})$. Cet espace vectoriel est, on l'a vu, de dimension finie ; égale à 1 s'il existe une seule solution entière positive, et à 2 s'il en existe deux.
Pour résumer, si l'on définit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & s^2 + (a-1)s + b \end{cases}$, alors on a ces différentes descriptions possibles du noyau de φ, plus ou moins compactes :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\varphi)) &= \mathrm{card}\left(\left\{s \in \mathbb{N} \mid s^2 + (a-1)s + b = 0\right\}\right) = \mathrm{card}\left(f^{-1}(\{0\})\right) \\ &= \begin{cases} 2 \text{ si (1) admet deux solutions entières,} \\ 1 \text{ si (1) admet une solution entière,} \\ 0 \text{ si (1) admet aucune solution entière.} \end{cases} \end{aligned}$$

13. Soient $I =]0, +\infty[$ et $J =]-\infty, 0[$. Considérons l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0, \tag{2}$$

et soit H_I l'ensemble de ses solutions de classe C^2 sur I. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit $t_0 \in I$. Le théorème de Cauchy implique que l'application suivante, manifestement linéaire :

$$\begin{array}{ccc} H_I & \to & \mathbb{R}^2 \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme, la surjectivité provenant de l'existence des solutions à un problème de Cauchy, et l'injectivité provenant de l'unicité de ces solutions. Par conséquent, on a $\dim(H_I) = 2$: l'ensemble des solutions à l'équation (2) est un espace vectoriel de dimension 2. On définit de même H_J, et alors : $\dim(H_J) = 2$.

14. Avec les notations ci-dessus, soit $y \in H_I$. Notons $g = y \circ \exp$. Alors :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = e^x y'(e^x), \qquad g''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x),$$

donc en particulier : $\forall x \in I$, $e^{2x} y''(e^x) = g''(x) - g'(x)$. Or, comme y vérifie (2), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{2x} y''(e^x) + a e^x y'(e^x) + b y(e^x) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) - g'(x) + a g'(x) + b g(x) = 0,$$

si et seulement si g est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$

15. Nous avons non seulement des implications directes, mais des équivalences dans la question précédente : l'application y est solution de (2) si et seulement si $g = y \circ \exp$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (3). Or :

$$g = y \circ \exp \Longleftrightarrow y = g \circ \ln,$$

les applications logarithme et exponentielle étant réciproques l'une de l'autre. Donc l'application g est solution sur $\mathbb{R}$ de (3) si et seulement si $y = g \circ \ln$ est solution de (2).

16. **Cas** $a = 3$ **et** $b = 1$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Dans ce cas, l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour solution unique -1, donc l'ensemble des solutions de (3) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)e^{-x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

D'après la correspondance établie, dans les deux questions qui précèdent, entre les solutions de (2) et de (3), on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) est :

$$H_I = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda + \mu \ln(x)}{x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

où l'on a utilisé l'identité : $\forall x \in I$, $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$.

Cas $a = 1$ **et** $b = 4$. Cette fois, l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ a pour solutions $2i$ et $-2i$, donc l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (3) est :

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (2) est :

$$H_I = \left\{ \begin{matrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(2\ln(x)) + \mu\sin(2\ln(x)) \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

17. On procède exactement comme dans la question **Q 14**, *mutatis mutandis.*
18. On montre aisément que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $u'' - 4u = 0$ est :

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

D'après la question **Q 14**, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0,$$

est :

$$H_I = \left\{ \begin{matrix} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2} \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

tandis que, en reprenant la question **Q 17** et en imitant la résolution de la question **Q 15** (pour s'assurer qu'on obtient ainsi *toutes* les solutions : on considère cette fois $x \mapsto \ln(-x)$ au lieu de ln), on montre que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$\forall x \in J, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0,$$

est :

$$H_J = \left\{ \begin{matrix} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(-x)^2 + \dfrac{\mu}{(-x)^2} \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{matrix} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2} \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Déduisons-en les solutions sur $\mathbb{R}$ par recollement : une telle solution y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et est en particulier une solution sur I et J. Il existe donc $(\lambda, \lambda', \mu, \mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ et : } \quad \forall x \in J, \quad y(x) = \lambda' x^2 + \frac{\mu'}{x^2}.$$

Cette application est continue en 0 à la condition nécessaire que $\mu = \mu' = 0$ (sinon la limite de y en 0 est infinie), et est de classe C^2 au voisinage de 0 à la condition nécessaire que y'' soit

continue en 0 : comme $\lim\limits_{x\to 0^+} y''(x) = \lambda$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} y''(x) = \lambda'$, cela impose $\lambda = \lambda'$. Une solution y sur $\mathbb{R}$ est donc nécessairement de la forme $x \mapsto \lambda x^2$; réciproquement une telle fonction est de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle étudiée sur $\mathbb{R}$.
Pour résumer, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0,$$

est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x^2 \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

19. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide puisqu'il contient 0. Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est, par définition, la borne supérieure de cet ensemble s'il est majoré, et $+\infty$ sinon.
20. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad J_0'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1}, \quad J_0''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

Alors, J_0 vérifie :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0, \tag{4}$$

si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = 0 \\ \iff &\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} kc_k x^k + c_1 x\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k = 0 \\ \iff &\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \left(k^2 c_k + c_{k-2}\right) x^k + c_1 x = 0. \end{aligned}$$

De l'unicité des coefficients d'une somme de série entière sur un voisinage de 0, on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{r} \forall k \geqslant 2,\ k^2 c_k + c_{k-2} = 0, \\ c_1 = 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} \forall k \geqslant 2,\ c_k = \dfrac{-1}{k^2} c_{k-2}, \\ c_1 = 0. \end{array} \right.$$

De la première relation on déduit par récurrence, en distinguant la parité des indices :

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ c_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} c_{2(k-1)} = \frac{-1}{(2k)^2} \times \frac{-1}{(2(k-1))^2} c_{2(k-2)} = \frac{-1}{(2k)^2} \times \frac{-1}{(2(k-1))^2} \times \cdots \times \frac{-1}{2^2} c_0,$$

c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} c_0$, l'égalité restant valable pour $k = 0$; ensuite, comme $c_1 = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ c_{2k+1} = \frac{-1}{(2k+1)^2} \times \frac{-1}{(2k-1)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{3^2} c_1 = 0.$$

Finalement, comme par hypothèse $c_0 = 1$, on a d'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} c_{2k+1} = 0, \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}. \end{cases} \tag{‡}$$

21. Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant 0} c_k x^k = \sum\limits_{k \geqslant 0} c_{2k} x^{2k}$, où les coefficients sont définis par les égalités de (‡), à l'aide de la règle de D'Alembert : si $x = 0$, la série converge trivialement (de somme égale à 1), et si $x \neq 0$:

$$\left| \frac{c_{2(k+1)} x^{2(k+1)}}{c_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{4^k (k!)^2}{4^{k+1}((k+1)!)^2} |x|^2 = \frac{|x|^2}{4(k+1)^2} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc $\sum\limits_{k \geqslant 0} c_{2k} x^{2k}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$: le rayon de convergence de cette série entière est infini.

22. Notons d'abord que J_0 étant une somme de série entière, elle est continue (et même de classe C^∞) sur son intervalle ouvert de convergence, en l'occurrence $\mathbb{R}$. Une application continue sur un segment est bornée, par conséquent J_0 est bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, et en particulier au voisinage de 0.

À présent, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que :

$$\forall x \in]0, r[,\ \alpha f(x) + \beta J_0(x) = 0.$$

On ne peut pas avoir $\alpha = 0$: sinon, pour tout $x \in]0, r[$, on a $\beta J_0(x) = 0$, et quand $x \to 0$ on obtient $\beta J_0(0) = \beta = 0$, ce qui est exclu puisque $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. On peut donc écrire $f = -\frac{\beta}{\alpha} J_0$; l'application J_0 étant bornée au voisinage de 0 d'après ce qui précède, il en est de même de f.

23. Puisque, par hypothèse, les séries entières $\sum\limits_{k \geqslant 0} \alpha_k x^k$ et $\sum\limits_{k \geqslant 0} \beta_k x^k$ sont de rayons de convergence R_α et R_β strictement positifs, leur produit de Cauchy est également de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_\alpha, R_\beta)$ strictement positif. Notons ce produit de Cauchy $\sum\limits_{n \geqslant 0} \gamma_n x^n$. Alors on a, par hypothèse sur les deux séries entières ci-dessus :

$$\forall x \in]-R, R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

De l'unicité des coefficients d'une somme de série entière sur un voisinage de 0, on déduit $\gamma_0 = 1$, et : $\forall n \geqslant 1$, $\gamma_n = 0$. Or, par définition d'un produit de Cauchy, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k},$$

d'où le résultat désiré (on suppose ici que $\alpha_0 = 1$).

24. Par définition du rayon de convergence, pour tout $r \in]0, R_\alpha[$ la suite $\left(\alpha_k r^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe donc $M > 0$ tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k r^k| \leqslant M,$$
d'où : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.

25. On raisonne par récurrence. Posons d'abord $\beta_0 = 1$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$; supposons avoir défini des réels $\beta_0, \ldots, \beta_n$ tels que :
$$\beta_0 = 1, \quad \forall m \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \beta_{m-k} = 0, \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!], \quad |\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$
On pose alors :
$$\beta_{n+1} = -\frac{1}{\alpha_0} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \beta_{n+1-k} = -\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \beta_{n+1-k}. \tag{5}$$
Alors on a bien la relation :
$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \beta_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \beta_{n+1-k} + \alpha_0 \beta_{k+1} = 0$$
par définition de β_{n+1}. De plus :
$$|\beta_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k| \cdot |\beta_{n+1-k}| = |\alpha_{n+1}| \cdot \underbrace{|\beta_0|}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot |\beta_{n+1-k}|$$
et donc, d'après (5) et la majoration de la question **Q 24** :
$$\begin{aligned}
|\beta_{n+1}| \leqslant \frac{M}{r^{n+1}} + M^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(M+1)^{n-k}}{r^k r^{n+1-k}} &= \frac{M}{r^{n+1}} + \frac{M^2(M+1)^n}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{M+1}\right)^k \\
&= \frac{M}{r^{n+1}} + \frac{M^2(M+1)^n}{r^{n+1}} \frac{1}{M+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{M+1}\right)^n}{1 - \frac{1}{M+1}} \\
&= \frac{M}{r^{n+1}} + \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}} \left(1 - \left(\frac{1}{M+1}\right)^n\right) \\
&= \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}},
\end{aligned}$$

ainsi les propriétés énoncées dans (5) s'étendent au rang $n+1$. On construit ainsi par récurrence une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés (5) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour l'unicité, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = 0$ impose l'égalité $\beta_n = -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k\beta_{n-k}$; partant de la condition $\beta_0 = 1$, on conclut rapidement par récurrence.

26. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}x^k = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{M}{M+1}\left(\dfrac{x(M+1)}{r}\right)^k$ est $\dfrac{r}{M+1} > 0$: on reconnaît, à une constante multiplicative près, une série géométrique. Puisque $|\beta_k| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on en déduit par comparaison que la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est de rayon de convergence $R_\beta \geqslant \dfrac{r}{M+1}$, donc R_β est strictement positif.

27. Si $y = \lambda J_0$, où λ est de classe C^2 sur $]0,r[$, alors y est elle-même de classe C^2 sur $]0,r[$ en tant que produit de fonctions de classe C^2. On a alors :

$$y' = \lambda' J_0 + \lambda J_0', \quad y'' = \lambda'' J_0 + 2\lambda' J_0' + \lambda J_0'',$$

donc y vérifie l'équation différentielle linéaire de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]0,r[,\ x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0\\
\Leftrightarrow &\forall x \in]0,r[,\ x^2\left(\lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)\right) + x\left(\lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x)\right)\\
&\quad + x^2\lambda(x)J_0(x) = 0,\\
\Leftrightarrow &\forall x \in]0,r[,\ \lambda(x)\left(x^2J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)\right) + x^2\left(\lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x)\right) + x\lambda'(x)J_0(x) = 0
\end{aligned}$$

et comme J_0 est elle-même solution de (4) sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in]0,r[$, $x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]0,r[,\ x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0\\
\Longleftrightarrow &\forall x \in]0,r[,\ x^2\lambda''(x)J_0(x) + 2x^2\lambda'(x)J_0'(x) + x\lambda'(x)J_0(x) = 0
\end{aligned}$$

Après multiplication par $\dfrac{J_0(x)}{x}$, on en déduit que si y vérifie (4) alors :

$$\forall x \in]0,r[,\ x\lambda''(x)(J_0(x))^2 + 2J_0'(x)J_0(x)x\lambda'(x) + \lambda'(x)(J_0(x))^2 = 0$$

(notons qu'on perd *a priori* l'équivalence puisque rien n'assure que $\frac{J_0(x)}{x} \neq 0$). On remarque que le membre de gauche de cette dernière égalité est la dérivée de l'application $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$, donc : si l'application $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0,r[$, alors $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

À présent, supposons que l'application $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$ soit de dérivée nulle, c'est-à-dire, après factorisation :

$$\forall x \in]0,r[,\ J_0(x)\left(x\lambda''(x)J_0(x) + 2J_0'(x)x\lambda'(x) + \lambda'(x)J_0(x)\right) = 0,$$

Nous aimerions diviser par $J_0(x) \neq 0$ afin de reconnaître l'égalité $x^2y''(x)+xy'(x)+x^2y(x) = 0$, mais nous ne savons pas si J_0 s'annule sur $]0,r[$. Nous devons donc suivre des voies détournées pour obtenir le résultat voulu : raisonnons par l'absurde, et supposons que la quantité en facteur de $J_0(x)$ est non nulle en un réel $x_0 \in]0,r[$; alors par continuité elle est non nulle en un voisinage V de x_0. L'égalité ci-dessus implique ensuite que pour tout $x \in V$, on a $J_0(x) = 0$. Alors $J_0'(x) = 0$ pour tout $x \in V$, et en particulier pour $x = x_0 \in V$ on a $J_0(x) = J_0'(x_0) = 0$; or on sait que J_0 est solution de l'équation différentielle (4), donc J_0 est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall x \in]0,r[,\ xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \\ \hfill y(x_0) = y'(x_0) = 0, \end{cases},$$

mais la fonction identiquement nulle en est également une solution ; par unicité des solutions à un problème de Cauchy, on a donc $J_0(x) = 0$ pour tout $x \in]0,r[$: c'est le théorème de Cauchy linéaire. Mais c'est impossible : l'application J_0 étant continue en 0, quand $x \to 0$ l'égalité précédente donnerait : $J_0(0) = 0$, or $J_0(0) = 1 \neq 0$. Nous avons une absurdité.
Ainsi, pour tout $x \in]0,r[$ on a : $x\lambda''(x)J_0(x) + 2J_0'(x)x\lambda'(x) + \lambda'(x)J_0(x) = 0$. Mais d'après les calculs qui précèdent, cette équation se réécrit :

$$\forall x \in]0,r[, \quad x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0,$$

donc y est solution de (4) sur $]0,r[$: d'où l'implication réciproque.
En conclusion : l'application $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si l'application $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.

28. La série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_kx^k$ est de rayon de convergence infini, comme nous l'avons démontré à la question **Q 21**, donc le produit de Cauchy de $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_kx^k$ par lui-même est également de rayon de convergence infini, et sa somme est J_0^2. Le produit de Cauchy d'une série entière est une série entière, donc J_0^2 est la somme d'une série entière. On a $J_0(0)^2 = 1^2 = 1$.

29. *Analyse.* Pour que $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$ soit de dérivée nulle sur $]0,r[$, il faut et il suffit qu'elle soit constante sur $]0,r[$; il suffit par exemple qu'elle soit constante égale à 1. Dans ce cas :

$$\forall x \in]0,r[, \quad (J_0(x))^2 \times (x\lambda'(x)) = 1.$$

Or J_0^2 est développable en série entière en 0 d'après la question précédente, et égale 1 en 0, donc d'après les questions **Q 23** à **Q 26** il existe une fonction S développable en série entière en 0 telle que, dans un voisinage I_S de 0 :

$$\forall x \in I_S, \quad (J_0(x))^2 \times S(x) = 1.$$

Donc : $\forall x \in]0, r[\cap I_S,\ x\lambda'(x) = S(x)$. L'application λ est donc une primitive de $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$. Ce n'est pas une application développable en série entière en 0, puisque $x \mapsto \frac{S(x)}{x}$ admet une limite infinie en 0 (rappelons que $S(0) = \beta_0 = 1$) ; on fait donc apparaître une application développable en série entière en 0 en décomposant S sous la forme : $\forall x \in]0, r[,\ S(x) = 1 + xT(x)$, où T est développable en série entière.

Synthèse. Soit $\sum\limits_{k \geqslant 0} \beta_k x^k$ la série entière inverse de la série entière dont la somme égale J_0^2 ; notons R son rayon de convergence, et pour tout $x \in]-R, R[$ posons :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k = 1 + x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}.$$

Pour tout $x \in]-R, R[$, on a $(J_0(x))^2 S(x) = 1$. Donc, si l'on définit :

$$\forall x \in]0, R[, \quad \lambda(x) = \int_1^x \frac{S(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k t^{k-1}\mathrm{d}t,$$

pour tout $x \in]0, R[$ on a : $\lambda'(x) = \dfrac{S(x)}{x} = \dfrac{1}{x(J_0(x))^2}$, donc $x \mapsto x(J_0(x))^2\lambda'(x)$ est une application constante sur $]0, R[$.

De plus, J_0 ne s'annule pas sur $]0, R[$, sinon on aurait $J_0^2 S \neq 1$ sur $]0, R[$. On en déduit, suivant l'équivalence de la question **Q 27**, que l'application :

$$y : x \mapsto \left(\ln(x) + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k t^{k-1}\mathrm{d}t\right) J_0(x)$$

est une solution de (4) sur $]0, R[$. Il reste à poser, pour tout $x \in]0, R[$,

$$\eta(x) = \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k t^{k-1}\mathrm{d}t \times J_0(x)$$

pour avoir y sous la forme annoncée : $y = \eta + J_0 \cdot \ln$; montrons que comme voulu, l'application η est la somme d'une série entière : l'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k t^{k-1}\mathrm{d}t$ est une primitive de somme de série entière, donc est la somme d'une série entière, et J_0 également ; leur produit η l'est donc aussi, *via* le produit de Cauchy des deux séries entières en jeu, qui est de rayon de convergence R_η supérieur ou égal à $\min(R, +\infty) = R > 0$: d'où le résultat.

30. Soit R le réel introduit dans la question précédente. Comme la dimension de l'espace vectoriel des solutions de :

$$\forall x \in]0, R[, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0 \tag{6}$$

est égale à 2 d'après le théorème de Cauchy, il suffit d'en trouver une famille libre de cardinal 2 pour en avoir une base. Notons $f = \eta + J_0 \cdot \ln$ la solution sur $]0, R[$ obtenue dans la question précédente : montrons que la famille (f, J_0) est libre.

Pour cela, on remarque que f n'est pas bornée. En effet,

$$J_0(x)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x) \underset{x\to 0}{\to} -\infty,$$

et η étant développable en série entière en 0, elle est bornée au voisinage de 0 par le même argument que celui utilisé dans la question **Q 22** ; on en déduit $f(x) \underset{x\to 0}{\to} -\infty$, donc f n'est pas bornée sur $]0, R[$; en considérant la contraposée du résultat démontré dans cette même question, on en déduit que la famille (f, J_0) est libre, de cardinal 2, donc engendre l'espace vectoriel des solutions de (6) : une application y de C^2 sur $]0, R[$ est solution de (6) si et seulement s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda f + \mu J_0$.

31. On a $|X| \leqslant 1$ par hypothèse, et 1 admet une espérance en tant que variable aléatoire à support fini (et cette espérance égale 1), donc par comparaison X en admet également une.
32. L'inégalité de Markov énonce que si Y est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives et ayant une espérance, alors pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(Y)}{\alpha}.$$

On la démontre comme suit : notons $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}_+$ un ensemble contenant l'image de Y, et soit $\alpha > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \mathbb{P}(Y = y_n) &= \sum_{\substack{n=0\\ y_n \geqslant \alpha}}^{+\infty} y_n \mathbb{P}(Y = y_n) + \underbrace{\sum_{\substack{n=0\\ y_n < \alpha}}^{+\infty} y_n \mathbb{P}(Y = y_n)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \alpha \sum_{\substack{n=0\\ y_n \geqslant \alpha}}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = y_n) = \alpha \cdot \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée en divisant par $\alpha > 0$. Cette démonstration englobe le cas d'une image finie.
33. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors $|X|$ en admet également une, et est à valeurs positives. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(|X|)}{\alpha}.$$

34. Soient $\varepsilon, t > 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tout d'abord, vérifions que e^{tX} admet bien une espérance : on a $0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^t$, et la variable aléatoire constante e^t admet une espérance parce qu'elle est à support fini. Par comparaison, c'est aussi le cas de e^{tX}.
On applique cette fois l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tnS_n} (qui est bien discrète parce que S_n l'est, et à valeurs positives parce que l'exponentielle est positive) et avec $\alpha = e^{tn\varepsilon}$. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc les variables aléatoires $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ le sont également. Donc :

$$E\left(e^{tnS_n}\right) = E\left(e^{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right) = \left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n.$$

Enfin, l'application $x \mapsto e^{tnx}$ étant croissante pour tous t et n strictement positifs, on a $\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) = (S_n \geqslant \varepsilon)$, donc :

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}},$$

d'où le résultat.

35. Soit $a > 1$. L'application $x \mapsto \dfrac{1-x}{2}a^{-1} + \dfrac{1+x}{2}a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et l'application $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composition des applications $x \mapsto x\ln(a)$ et $x \mapsto \exp(x)$. Leur différence g_a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ également, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a'(x) = \frac{1}{2}(a - a^{-1}) - \ln(a)a^x.$$

On a $a > 1$, donc $\ln(a) > 0$. Ainsi l'application $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de l'application affine $x \mapsto x\ln(a)$, de pente strictement positive, et de l'application exponentielle. On en déduit que $x \mapsto -\ln(a)a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc g_a' également.

De plus, $g_a(-1) = g_a(1) = 0$ comme le montre un calcul immédiat, donc d'après le théorème de Rolle dont g_a vérifie bien les hypothèses, il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $g_a'(x_0) = 0$; comme g_a' est strictement décroissante, on peut résumer le comportement de g_a ainsi :

x	-1		x_0		1
$g_a'(x)$		$+$	0	$-$	
g_a	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

En particulier, pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $g_a(x) \geqslant 0$.

36. Soit $t > 0$. On pose ici $a = e^t > 1$, et la question précédente implique l'inégalité : $\forall x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t - e^{tx} \geqslant 0,$$

et c'est précisément le résultat désiré, après avoir ajouté e^{tx} à chaque membre de l'inégalité.

37. Soit $t > 0$. Si, pour tout $\omega \in \Omega$ on applique l'inégalité précédente à $x = X(\omega)$, qui appartient toujours à $[-1, 1]$ par hypothèse sur X, on a :

$$e^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$

Comme l'espérance est linéaire et positive, on en déduit :

$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \frac{e^{-t}}{2}\left(E(1) - E(X)\right) + \frac{e^{t}}{2}\left(E(1) + E(X)\right)$$

Or $E(1) = 1$, et X est centrée donc $E(X) = 0$, et on a finalement :

$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \cosh(t).$$

38. L'inégalité attendue revient à démontrer que $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons-le par récurrence sur k : si $k = 0$, c'est évident, puisqu'on a $0! = 1 \geqslant 2^0 \cdot 0!$ (il y a même égalité ici). À présent, soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons que $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$. Alors :

$$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)(2k)! \geqslant \underbrace{(2k+1)}_{\geqslant 1} \cdot 2^k \cdot k! \geqslant 2(k+1) \cdot 2^k \cdot k! = 2^{k+1}(k+1)!,$$

d'où l'hérédité. On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$. Ensuite :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

parce que $t^{2k} \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On écrit ensuite $t^{2k} = (t^2)^k$ pour avoir le résultat voulu. En reprenant l'inégalité de la question précédente, on a donc :

$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

d'après les développements en série entière en 0 des fonctions usuelles exponentielle et cosinus hyperbolique.

39. Étudions les variations de $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. L'application $t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $t \mapsto -n\varepsilon + nt = n(t-\varepsilon)$. On en déduit que $t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$, puis strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. L'exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que l'application composée $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$, puis strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. Elle admet donc un minimum en ε, qui vaut $e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

40. Les questions **Q 34**, **Q 38** et **Q 39** impliquent :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}} \leqslant e^{n\frac{t^2}{2}-tn\varepsilon}.$$
En prenant $t = \varepsilon$, on en déduit :
$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$
Le même raisonnement permet de démontrer que $\mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$: il suffit de remplacer les X_i par les $-X_i$, qui restent mutuellement indépendantes et de même loi que $-X$ dont l'image est également incluse dans $[-1, 1]$; autrement dit, ces variables aléatoires vérifient les hypothèses de l'énoncé, donc la même conclusion. Alors, comme :
$$(|S_n| \geqslant \varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (S_n \leqslant -\varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (-S_n \geqslant \varepsilon),$$
l'union étant disjointe, on en déduit :
$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

41. Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ est géométrique, de raison $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]-1, 1[$, donc elle est convergente. Or, en utilisant la question précédente et l'inclusion $(|S_n| > \varepsilon) \subseteq (|S_n| \geqslant \varepsilon)$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$$
donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

42. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, puisque $|S_n|$ est une variable aléatoire, l'ensemble $(|S_n| > \varepsilon)$ est un évènement. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $B_n = \bigcup\limits_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)$ est un évènement en tant qu'union dénombrable d'évènements.
De plus, on vérifie directement que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a $B_{n+1} \subseteq B_n$ (on unit de moins en moins d'ensembles parmi ceux de la collection $((|S_n| > \varepsilon))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$) donc, d'après le théorème de continuité décroissante :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$
Or, par sous-additivité, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|S_m| > \varepsilon\right),$$
et le membre de droite est le reste d'indice $n - 1$ d'une série convergente (d'après la question précédente), donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|S_m| > \varepsilon\right) = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$, d'où le résultat.

43. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut décrire Ω_k ainsi :

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcap_{m \geqslant n} \left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{\bigcup_{m \geqslant n} \left(|S_m| > \frac{1}{k} \right)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bar{B}_n, \tag{7}$$

où l'on a posé $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\bar{B}_n$ est un évènement parce que B_n en est un, donc Ω_k est un évènement en tant qu'union dénombrable d'évènements.
Par définition de la limite (où l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$), si $\omega \in \Omega$ vérifie $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}, \tag{8}$$

Donc :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\} \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Omega_k,$$

et l'inclusion réciproque se vérifie en remarquant que la propriété (8) implique :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit, pour cela, d'observer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$. Donc :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Omega_k.$$

En tant qu'intersection dénombrable d'évènements, A est un évènement.

44. Pour éviter les confusions, notons $B_{n,\varepsilon} = \bigcup\limits_{m \geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)$ au lieu de B_n. D'après (7), on a :

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Omega_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bar{B}_{n,\frac{1}{k}} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{n,\frac{1}{k}}} = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{n,\frac{1}{k}}},$$

donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{n,\frac{1}{k}} \right).$$

Par sous-additivité, on a :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{n,\frac{1}{k}} \right),$$

et nous avons démontré, dans la question **Q 42**, que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} B_{n,\varepsilon} \right) = 0$ indépendamment de $\varepsilon > 0$, donc $\mathbb{P}(A) \geqslant 1$; mais on a aussi $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$ puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité. On en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$