

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2024
Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

I - Inégalité de Knopp

I.A – Deux inégalités intégrales

I.A.1) – Inégalité intégrale de Jensen

Q 1. L'énoncé ne suppose pas que a est distinct de b explicitement. Nous le faisons dans ce qui suit.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Comme φ est convexe sur J , et que les $f(a_k)$ appartiennent à J , l'inégalité de Jensen implique :

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(a_k) \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi(f(a_k)). \quad (1)$$

Comme f est continue par morceaux sur $[a, b]$, la suite des sommes de Riemann de pas régulier converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) = \int_a^b f,$$

donc, par continuité de φ , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(a_k) \right) = \varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$.

Comme $\varphi \circ f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ en tant que composition d'une application continue par une application continue par morceaux à droite, le même argument que ci-dessus donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \varphi(f(a_k)) = \int_a^b \varphi \circ f$. Par conséquent, considérer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité (1) donne :

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f,$$

d'où le résultat.

I.A.2) – Une autre inégalité intégrale

Q 2. Soit $x > 0$. On a par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq |g(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^x t |f(t)| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x x |f(t)| dt = \int_0^x |f(t)| dt.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x |f(t)| dt = 0$ (argument massue : la continuité par morceaux sur $[0, 1]$ suffit). Donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Q 3. On suit l'indication de l'énoncé. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Posons :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad h(x, t) = \frac{1}{x} t f(t) \mathbb{1}_{[0, x]}(t).$$

Le nom de cette fonction n'est pas à confondre avec la fonction h de l'énoncé (de toute façon, nous n'utiliserons plus cette fonction $(x, t) \mapsto h(x, t)$ dans les questions suivantes). Alors :

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$, on a $x > t$ et donc : $h(x, t) = \frac{1}{x}tf(t)$, ce dont on déduit immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0,$$

et l'application $t \mapsto 0$ est bien sûr continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ on a :

$$|h(x, t)| \leq |f(t)|; \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

en effet, soit $x < t$, et dans ce cas $h(x, t) = 0$ à cause de la présence de la fonction indicatrice : auquel cas l'inégalité ci-dessus est triviale ; soit $x \geq t$, ce qui permet de majorer $\frac{t}{x}$ par 1, et donne le majorant ci-dessus.

L'application $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car f l'est par hypothèse), les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu sont vérifiées. Cela implique plus particulièrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h(x, t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Q 4. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x tf(t)dt$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour éclairer la démonstration, je suppose d'abord que f est *continue*, puis explique ci-bas comment adapter la démonstration dans le cas continu par morceaux.

L'application h est continue sur $]0, +\infty[$. Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt = \int_0^x \frac{F(t)}{t^2}dt$, en intégrant $t \mapsto t$ (qui est continue) et en dérivant F (qui est de classe C^1 et de dérivée $x \mapsto xf(x)$, avec l'hypothèse additionnelle ci-dessus). On a par les deux questions précédentes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -g(x) = 0,$$

donc par la formule de l'intégration par parties les intégrales $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} -\frac{F'(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} -f(t)dt$ sont de même nature. Or la seconde converge puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, donc la première aussi. On a de plus :

$$\int_0^{+\infty} h(t)dt = \left[-\frac{F(t)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt,$$

d'où le résultat.

Expliquons maintenant comment adapter la démonstration dans le cas où f est seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$: l'ensemble I de ses points de discontinuité sur $\mathbb{R}_+$ est au plus dénombrable, par définition même de la continuité par morceaux (il y a un nombre fini de points de discontinuité dans tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$), et de plus chacun de ces points est isolé. Cela permet de décrire l'ensemble de ces points de discontinuité par une suite strictement croissante $(a_i)_{i \in I}$ avec I de la forme $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$. Pour alléger la rédaction, faisons comme si l'on avait $I = \mathbb{N}$ (mais le raisonnement n'est guère différent dans le premier cas).

Ceci étant dit, on sait démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ (il suffit d'écrire $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} tf(t)dt$ et d'utiliser le fait qu'une fonction continue par morceaux soit localement bornée, pour montrer que cette quantité est inférieure à ε en valeur absolue dès que $|h| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \sup_{[x-1, x+1] \cap \mathbb{R}_+} |tf(t)|}$, par exemple). Cela permet déjà d'assurer la continuité de h sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc son intégrabilité locale).

De plus, la restriction de $F : x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ à $[a_i, a_{i+1}]$ est de classe C^1 (et ce, même si f a des discontinuités sur $[0, x]$ pour $x \in]a_i, a_{i+1}[$), et sa dérivée est $x \mapsto x\tilde{f}_i(x)$, où $\tilde{f}_i$ est le prolongement continu de f à $[a_i, a_{i+1}]$. Il suffit pour cela d'imiter la démonstration dans le cas continu. En effet, pour tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in]a_i, a_{i+1}[$, on a :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - x\tilde{f}_i(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (tf(t) - x\tilde{f}_i(x))dt \right| \leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} |tf(t) - x\tilde{f}_i(x)| dt \right|$$

La valeur absolue semblant superflue sur l'intégrale est là pour englober le cas où $x+h < x$.

Comme $t \mapsto t\tilde{f}_i(t)$ est continue en $x \in [a_i, a_{i+1}]$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]a_i, a_{i+1}[$ vérifiant $|t-x| < \eta$, on ait : $|tf(t) - x\tilde{f}_i(x)| \leq \varepsilon$. Ceci permet d'achever le calcul :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - x\tilde{f}_i(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{h} \left| \int_x^{x+h} dt \right| = \varepsilon.$$

Ceci montre que F est dérivable en tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$ et que sa dérivée est $x \mapsto x\tilde{f}_i(x)$. Cette dérivée est continue, donc F est de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. Ainsi on peut intégrer par parties sur $[a_i, a_{i+1}]$ comme dans le cas avantageux traité en premier. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} h(t)dt &= \left[-\frac{F(t)}{t} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} -\frac{F'(t)}{t} dt = \left[-\frac{F(t)}{t} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(t)dt \\ &= \left[-\frac{F(t)}{t} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \end{aligned}$$

où la simplification de $\tilde{f}_i$ en f tient compte de l'omission des points isolés dans la valeur d'une intégrale.

On fait de même si besoin sur $[0, a_0]$, puis on somme pour obtenir l'intégrale sur $[0, +\infty[$ grâce à la relation de Chasles. Les termes entre crochets forment une somme télescopique, dont la valeur est $\left[-\frac{F(t)}{t} \right]_0^{+\infty} = 0$. D'où le résultat.

S'il y a un nombre fini de points de discontinuité, le raisonnement est le même, à ceci près qu'il faut également intégrer par parties l'intégrale sur $[a_n, +\infty[$, où a_n est le dernier point de discontinuité de f .

Remarque. La positivité de f suffit dans toute cette partie. L'hypothèse de stricte positivité est superflue (mais elle ne l'est pas dans la partie suivante).

I.B – Démonstration de l'inégalité de Knopp

Q 5. Soit $x > 0$. On aimerait appliquer la question **Q 1** avec $\varphi = \exp$ et $t \mapsto \ln(tf(t))$ (et non pas $\ln \circ f$, qui ne donnerait pas $tf(t)$ dans l'intégrale majorante). Le problème est que $t \mapsto \ln(tf(t))$ n'est pas continue sur $[0, x]$ parce que l'argument du logarithme s'annule en 0. Pas grave : nous allons raisonner sur $[a, x]$ et passer à la limite.

Soit $a \in]0, x[$. L'application $t \mapsto \ln(tf(t))$ est continue par morceaux sur $[a, x]$, par composition de $t \mapsto tf(t)$ (continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) et du logarithme (continu sur $\mathbb{R}_+^*$). Comme, de plus, l'exponentielle est continue sur $[a, x]$ et convexe car $\exp'' = \exp > 0$, on peut appliquer la question **Q 1** pour obtenir :

$$\exp \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x \ln(tf(t))dt \right) \leq \frac{1}{x-a} \int_a^x \exp(\ln(tf(t)))dt = \frac{1}{x-a} \int_a^x tf(t)dt.$$

Notons que l'intégrale $\int_0^x \ln(tf(t))dt$ converge absolument donc converge : l'intégrande est continu sur $]0, x]$ et comme f est strictement positive, on a :

$$\ln(tf(t)) = \ln(tf(0) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t)) = \ln(t) + \ln(f(0)) + \ln(1 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(1)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t).$$

Or il est classique de démontrer que le logarithme est intégrable au voisinage de 0 : il est continu sur $]0, x]$ et dominé par la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable au voisinage de 0 car d'exposant $\frac{1}{2} < 1$. Par comparaison, on a la convergence absolue annoncée.

Quand $a \rightarrow 0$, on a alors :

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) \leq \frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt. \quad (2)$$

Pour l'étudiant perplexe vis-à-vis de la continuité de $a \mapsto \int_a^x tf(t)dt$, à cause de la continuité *par morceaux* de l'intégrande : nous le renvoyons à la fin de la question **Q 4**.

Or :

$$\int_0^x \ln(tf(t))dt = \int_0^x \ln(t)dt + \int_0^x \ln(f(t))dt,$$

où la première intégrale converge comme nous l'avons rappelé plus haut. De plus on sait montrer, *via* une intégration par parties classique (où l'on dérive le logarithme et intègre la fonction constante égale à 1 ; le théorème des croissances comparées assure que le terme entre crochets $[t \ln(t)]_0^x = x \ln(x) - \lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t)$ est correctement défini), que :

$$\int_0^x \ln(t)dt = x \ln(x) - x,$$

donc :

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) = \exp\left(\frac{x \ln(x) - x}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) = \frac{x}{e} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right).$$

L'inégalité (2) donne donc, après multiplication par $\frac{e}{x} > 0$:

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t)dt,$$

d'où le résultat.

Q 6. L'application $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions continues (pour la continuité de $x \mapsto \int_0^x \ln(tf(t))dt$, je renvoie à la fin de la résolution de la question **Q 4**). Justifions son intégrabilité. Comme c'est une fonction positive, cela équivaut à la convergence de son intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$. On a par la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t)dt\right) dx.$$

Avec les notations de la partie **I.A.2**), qu'on peut appliquer au vu des hypothèses sur f , cette inégalité équivaut à :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} h(x)dx.$$

Or nous avons montré à la question **Q 4** que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge. Donc :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx < +\infty,$$

ce qui montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx$ converge. Par ailleurs, toujours par la question **Q 4**, l'inégalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} f(x)dx,$$

d'où le résultat.

I.C – Application à l'inégalité de Carleman

Q 7. Le cas $k = 1$ étant trivial, nous supposons $k \geq 2$. L'application v_k est dérivable sur $[k - 1, k]$, de dérivée :

$$v'_k : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \ln(a_k)(1 - k) \right),$$

or la décroissance de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ permet d'écrire : $\forall i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket, \ln(a_i) \geq \ln(a_k)$, donc :

$$\forall x \in [k - 1, k], \quad v'_k(x) \leq -\frac{1}{x^2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_k) + \ln(a_k)(1 - k) \right) = 0,$$

donc v_k décroît sur $[k - 1, k]$ et sa valeur minimale est en k : d'où le résultat.

Q 8. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application f est en escalier donc continue par morceaux, et l'intégrale de l'énoncé existe par la question **Q 6** : l'intégrabilité sur un intervalle implique l'intégrabilité sur tout sous-intervalle. De plus, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \forall x \in [k - 1, k], \quad \int_0^x \ln(f(t)) dt &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i-1}^i \ln(f(t)) dt + \int_{k-1}^x \ln(f(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i-1}^i \ln(a_i) dt + \int_{k-1}^x \ln(a_k) dt \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (x - (k - 1)) \ln(a_k) \\ &= x v_k(x). \end{aligned}$$

Cette expression est aussi valable pour $k = 1$, avec la convention habituelle sur les sommes vides. En utilisant la décroissance de v_k sur $[k - 1, k]$ démontrée à la question précédente, on a donc :

$$\int_{k-1}^k \exp \left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt \right) dx = \int_{k-1}^k \exp(v_k(x)) dx \geq \int_{k-1}^k \exp(v_k(k)) dx,$$

or : $v_k(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)$. D'où le résultat :

$$\int_{k-1}^k \exp \left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt \right) dx \geq \int_{k-1}^k \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i) \right) dx = \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i) \right).$$

Q 9. Supposons que $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge. En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp \left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt \right) dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \exp \left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(t f(t)) dt \right) dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \exp \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i) \right) \quad (\text{Q 8}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{k}}, \end{aligned}$$

mais aussi, sous réserve de vérification des hypothèses de la question **Q 6** :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t))dt\right) dx &\leq e \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= e \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k-1}^k f(x)dx \\ &= e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k. \end{aligned} \quad (\text{Q 6})$$

Pour utiliser la question **Q 6**, nous avons *a priori* besoin que f soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (les autres hypothèses étant manifestement vérifiées). C'est bien le fait, puisque f est positive, et que dans ce cas la relation de Chasles est vraie sans hypothèse de convergence, ce que d'ailleurs nous avons utilisé ci-dessus pour montrer : $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Or cette somme est finie puisque nous avons supposé la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} a_k$: d'où le résultat.

Q 10. Nous allons nous ramener à une suite décroissante $(a_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$, où $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une bijection. L'idée est de prendre pour valeurs le maximum de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$, puis la deuxième plus grande valeur de cette suite, etc. Pour cela, encore faut-il que ces maximums existent. Cet aspect étant technique voire techniciste, mettons-le de côté pour le moment : admettons provisoirement l'existence d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que $(a_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ soit une suite strictement décroissante de réels positifs. On peut alors lui appliquer la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_{\varphi(i)} \right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Or on sait (par la théorie des familles sommables) que pour une somme de réels positifs, la formule du changement de variable implique : $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. De plus, le fait que $a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(k)}$ soient les k plus grandes valeurs de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ implique : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \prod_{i=1}^k a_i \leq \prod_{i=1}^k a_{\varphi(i)}$. La majoration ci-dessus implique donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

d'où le résultat.

Justifions à présent l'existence de φ . Comme la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge, la suite de réels strictement positifs $(a_k)_{k \geq 1}$ converge vers 0. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq N$, on ait : $a_k < a_1$. Notons que $N \geq 2$, puisque a_1 n'est pas strictement inférieur à lui-même. L'ensemble $\{a_k \mid k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket\}$ étant non vide, il admet un maximum, et ce maximum doit être le maximum de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ (puisque a_1 majore tous les termes a_k avec $k \geq N$, les indices $k \geq N$ ne peuvent réaliser le maximum). Ainsi :

$$\max \{a_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \max \{a_k \mid k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket\}$$

existe. On pose $\varphi(1)$ égal au plus petit indice k qui réalise ce maximum.

Par un argument similaire, où l'on remplace a_1 par $\min(a_1, a_{\varphi(1)})$, le maximum suivant existe :

$$\max \{a_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0, \varphi(1)\}\}.$$

On pose $\varphi(2)$ égal au plus petit indice k qui réalise ce maximum. On construit ainsi une bijection $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par récurrence, en posant $\varphi(n)$ égal au plus petit indice k réalisant le maximum de :

$$\{a_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0, \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}\}$$

Par construction, l'application φ est injective (en effet, pour tout n entier naturel non nul, l'image par φ de n est différente des images par φ des entiers antérieurs). La surjectivité est facile à appréhender, moins à écrire rigoureusement. Soit $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier dont on veut construire un antécédent par φ . Notons A_{k_0} le nombre d'indices k tels que $a_k = a_{k_0}$. L'ensemble $\{\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid a_\ell > a_{k_0}\}$ est fini par un argument similaire à ceux employés ci-dessus, et si l'on note N son cardinal, alors :

$$\{\varphi(1), \dots, \varphi(N)\} = \{\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid a_\ell > a_{k_0}\}.$$

Cela découle à la fois du fait que le maximum de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ soit parmi les a_ℓ tels que $a_\ell > a_{k_0}$, et de la définition par récurrence de l'application φ . Toujours d'après cette définition, on doit avoir $\varphi(N+1) = a_{k_0}$: en effet, comme $a_{\varphi(N+1)}$ est la plus grande valeur de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ après avoir exclu les N plus grandes (avec répétitions éventuelles), et que a_{k_0} n'en fait pas partie par l'égalité ensembliste ci-dessus, on a : $a_{\varphi(N+1)} \geq a_{k_0}$. Mais on a aussi $a_{\varphi(N+1)} \leq a_{k_0}$ puisque $\varphi(N+1) \notin \{\varphi(1), \dots, \varphi(N)\}$, d'où l'égalité.

Cela ne prouve pas encore que k_0 admet un antécédent par φ : il suffit de dire que, toujours par construction de φ et définition de A_{k_0} , on doit avoir : $a_{\varphi(N+1)} = a_{\varphi(N+2)} = \dots = a_{\varphi(N+A_{k_0})} = a_{k_0}$, et $a_{\varphi(N+A_{k_0}+1)} < a_{k_0}$: cela fournit $A_{k_0} + 1$ antécédents par la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ de a_{k_0} , or il doit y avoir A_{k_0} antécédents : ce n'est possible que s'il existe $i \in \llbracket 1, A_{k_0} \rrbracket$ tel que $\varphi(N+i) = k_0$, donc k_0 admet un antécédent. On a montré la surjectivité de φ , et donc sa bijectivité, et de plus la suite $(a_{\varphi(k)})_{k \geq 1}$ est clairement décroissante : d'où le résultat.

II - Inégalité de Carleman

II.A – Inégalité arithmético-géométrique

Q 11. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\partial_i f(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k = \frac{f(x)}{x_i}, \quad \partial_i g(x) = 1,$$

donc :

$$\nabla f(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}, \quad \nabla g(x) = (1)_{1 \leq i \leq n}.$$

Q 12. Puisque f est polynomiale, elle est continue sur X_s , qui est un ensemble compact non vide car :

- fermé en tant qu'intersection des fermés $\overline{U_n}$ et $X_s = g_s^{-1}(\{0\})$ – notons que g_s est continue pour la même raison que f ;
- borné puisque inclus dans la sphère de centre $\vec{0}$ et de rayon 1 pour la norme 1 : en effet, si $x \in \overline{U_n}$, alors $g_s(x) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n |x_k| = \sum_{k=1}^n x_k = s$.
- inclus dans $\mathbb{R}^n$ qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie (ce qui assure que les fermés bornés et les compacts coïncident) ;
- non vide puisque $x_0 = \left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n} \right) \in U_n$ et on a : $g_s(x_0) = 0$, donc $x_0 \in X_s$.

Par le théorème des bornes atteintes, $f|_{X_s}$ atteint un maximum sur X_s .

Soit $a \in X_s$ un point où ce maximum est atteint. Justifions que a n'est pas sur la frontière de U_n . Le cas échéant, a aurait une coordonnée nulle, et donc : $f(a) = 0$. Or, si l'on reprend le vecteur x_0 défini ci-dessus, on a : $f(x_0) = \left(\frac{s}{n} \right)^n > 0$, ce qui contredirait la maximalité de $f(a)$: absurde. Ceci montre que l'on a : $a \in X_s \cap U_n$.

Q 13. Par le théorème des extremums liés appliqué aux fonctions $f|_{U_n}$ et $g|_{U_n}$, dont les hypothèses sont vérifiées d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. C'est-à-dire, d'après la question **Q 11** :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{f(a)}{a_i} = \lambda.$$

De plus $\lambda > 0$ puisque $f(a) > 0$ d'après le raisonnement de la question précédente (et $a_i > 0$ car $a \in U_n$), d'où le résultat.

Q 14. La question précédente montre que l'on a : $a_1 = \dots = a_n$. Comme : $\sum_{i=1}^n a_k = s$, il en résulte :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_k = \frac{s}{n}.$$

Or on rappelle que $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point où est atteint le maximum de la restriction de f à X_s . Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s$ on a donc : $f(x) \leq f(a)$, c'est-à-dire :

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^n,$$

et l'inégalité arithmético-géométrique en découle après extraction de la racine n^e , d'abord pour $(x_1, \dots, x_n) \in X_s$. La limitation de l'énoncé à $x \in U_n \cap X_s$ est inutile.

Si $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, notons d'abord que l'inégalité arithmético-géométrique est triviale si $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. En effet, le cas échéant, on a $x_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul), et l'inégalité arithmético-géométrique équivaut alors à : $0 \leq 0$.

Supposons donc : $\sum_{k=1}^n x_k > 0$, et notons s la valeur de cette somme. Alors $x \in X_s$ et donc, par le raisonnement qui précède : $\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. D'où le résultat.

II.B – Démonstration de l'inégalité de Carleman

Q 15. Le gradient de h_n est le même que celui de g_s dans la partie précédente : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n$, $\nabla h_n(x) = (1, \dots, 1)$. Seul celui de F_n mérite réflexion. Pour celui, il suffit de calculer celui de :

$$f_\ell : x \mapsto \left(\prod_{k=1}^{\ell} x_k\right)^{1/\ell}$$

pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n, \quad \partial_i f_\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} x_i^{\frac{1}{\ell}-1} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\ell} x_k\right)^{\frac{1}{\ell}} & \text{si } i \leq \ell, \\ 0 & \text{si } i > \ell, \end{cases}$$

donc pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n$ on a :

$$\nabla F_n(x) = \left(\sum_{\ell=1}^n \partial_i f_\ell\right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{\ell=i}^n \frac{1}{\ell} x_i^{\frac{1}{\ell}-1} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\ell} x_k\right)^{\frac{1}{\ell}}\right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\frac{1}{x_i} \sum_{\ell=i}^n \frac{1}{\ell} \left(\prod_{k=1}^{\ell} x_k\right)^{\frac{1}{\ell}}\right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Q 16. C'est le même argument que dans la question **Q 12**, *mutatis mutandis*.

Q 17. C'est le même raisonnement que dans la question **Q 17**. Par le théorème des extremums liés appliqué aux fonctions $F_{n|U_n}$ et $h_{n|U_n}$, dont les hypothèses sont vérifiées d'après la question précédente et par le fait admis dans l'énoncé que $a \in U_n \cap U_n$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\nabla F_n(a) = \lambda \nabla h_n(a)$. C'est-à-dire, d'après la question **Q 15** :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{a_i} \sum_{\ell=i}^n \frac{1}{\ell} \left(\prod_{k=1}^{\ell} a_k \right)^{\frac{1}{\ell}} = \lambda.$$

Cette égalité implique directement que $\lambda > 0$. On obtient les égalités de l'énoncé en multipliant cette égalité par a_i et en notant que $\left(\prod_{k=1}^{\ell} a_k \right)^{\frac{1}{\ell}} = \gamma_{\ell}$ pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (l'égalité $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ provient simplement de l'appartenance de a à H_n), d'où le résultat.

Q 18. En sommant les n premières égalités de la question précédente, et en constatant que $\frac{\gamma_{\ell}}{\ell}$ apparaît ℓ fois dans le membre de gauche pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^n \gamma_{\ell} = \sum_{\ell=1}^n \lambda a_{\ell} = \lambda.$$

De plus, par définition de F_n et des γ_i , on a : $\sum_{\ell=1}^n \gamma_{\ell} = F_n(a) = M_n$, ce qui donne la propriété (a) de l'énoncé. Montrons la propriété (b). Le cas $k = n$ découle immédiatement de l'égalité $\frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n$, qui donne : $\gamma_n = \lambda n a_n$. Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors, en soustrayant les deux égalités :

$$\sum_{\ell=k}^n \frac{\gamma_{\ell}}{\ell} = \lambda a_k, \quad \sum_{\ell=k+1}^n \frac{\gamma_{\ell}}{\ell} = \lambda a_{k+1},$$

on a : $\frac{\gamma_k}{k} = \lambda(a_k - a_{k+1})$, donc :

$$\gamma_k = \lambda k(a_k - a_{k+1}) = \lambda k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) a_k = \lambda \omega_k a_k,$$

d'où le résultat.

Q 19. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que l'on a : $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$, donc :

$$\left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{k+1} = \exp \left((k+1) \ln \left(1 + \frac{1}{k+1} \right) \right) \leq \exp \left((k+1) \cdot \frac{1}{k+1} \right) = e,$$

d'où le résultat en passant à l'inverse.

Q 20. On a : $\omega_1 = \frac{\gamma_1}{a_1 \lambda} = \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e}$. Montrons à présent : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_k \leq \frac{k}{k+1}$, par récurrence sur k . Le cas $k = 1$ vient d'être traité, puisque : $e \geq 2$ (la calculatrice était autorisée pour cette épreuve, en cas d'oubli inexplicable sur les valeurs approchées de e ; on peut aussi déduire cette minoration de l'égalité : $e = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}$).

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose : $\omega_k \leq \frac{k}{k+1}$. Suivons l'indication de l'énoncé. On a :

$$\gamma_{k+1}^{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} a_i = a_{k+1} \prod_{i=1}^k a_i = a_{k+1} \gamma_k^k,$$

et donc :

$$\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{\gamma_{k+1}^{k+1}}{\lambda^{k+1} a_{k+1}^{k+1}} = \frac{\gamma_k^k}{\lambda^{k+1} a_{k+1}^k} = \frac{\lambda^k \omega_k^k a_k^k}{\lambda^{k+1} a_{k+1}^k} = \frac{\omega_k^k}{\lambda} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right)^k.$$

Or, par définition de ω_k pour $k \leq n-1$, on a : $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\omega_k}{k}$. D'où :

$$\omega_{k+1}^k = \frac{\omega_k^k}{\lambda} \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}.$$

Cette identité permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. On a, par croissance de l'application $x \mapsto (1-x)^{-k}$ sur $[0, 1[$:

$$\omega_{k+1}^k \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-k},$$

or $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e}$ d'après l'hypothèse absurde, et d'après la question précédente on a : $\frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$, donc :

$$\omega_{k+1}^k \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-k} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1},$$

d'où le résultat au rang $k+1$ après extraction de la racine $(k+1)^e$. L'inégalité est héréditaire.

Par principe de récurrence : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_k \leq \frac{k}{k+1}$.

Q 21. Par la question précédente, on a : $n = \omega_n \leq \frac{n}{n+1}$, donc : $n \leq 0$. C'est absurde par hypothèse sur n , qui est un entier naturel non nul. Par l'absurde, on a donc : $\lambda \leq e$ (en regardant de près, on a même $\lambda < e$).

Concluons. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ vérifie $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, c'est-à-dire appartient à $\overline{U_n} \cap H_n$, on a : $F_n(x) \leq M_n$, donc par la propriété (a) de la question **Q 18** on a :

$$\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^k x_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \lambda \leq e,$$

d'où le résultat. Se restreindre à $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est superflu, tant que $x \in \overline{U_n} \cap H_n$.

Q 22. Soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{k \geq 1} x_k$ converge. Pour tout

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, en appliquant la question précédente au vecteur $\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} (x_1, \dots, x_n)$ qui appartient bien

à H_n , on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\left(\prod_{i=1}^k x_i\right)^{\frac{1}{k}}}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq e,$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^k x_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{i=1}^n x_i \leq e \sum_{i=1}^{+\infty} x_i < +\infty.$$

La série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \left(\prod_{i=1}^k x_i\right)^{\frac{1}{k}}$ est majorée, donc elle converge. En prenant la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient enfin l'inégalité de Carleman :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^k x_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{i=1}^{+\infty} x_i.$$

III - Inégalité de Carleman-Yang

III.A – Un développement en série entière

Q 23. Soit t non nul au voisinage de 0. On a : $1 - t > 0$, ce qui permet d'écrire :

$$\varphi(t) = e^{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)},$$

or :

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t) = \frac{t-1}{t} \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{t} \cdot (-t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1,$$

donc, par continuité de l'exponentielle : $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = e$. Ainsi φ se prolonge par continuité en 0 en posant : $\varphi(0) = e$.

Q 24. On montre : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|b_n| \leq 1$, par récurrence forte sur n . Pour $n = 1$ le résultat est trivial vu que $b_0 = -1$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|b_k| \leq 1$. Alors :

$$|b_{n+1}| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} b_{n-k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} |b_{n-k}| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} 1 \cdot 1 = 1,$$

d'où le résultat au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a le résultat pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par le théorème de comparaison des séries entières, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{k \geq 0} b_k t^k$ est supérieur ou égal à

celui de la série entière géométrique $\sum_{k \geq 0} t^k$, donc : $R \geq 1$.

Q 25. Considérons d'abord $t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. L'expression $\varphi(t) = e^{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)}$ assure que φ est dérivable en tout point non nul de $] - 1, 1[$ et qu'on a :

$$\varphi'(t) = \left[\frac{\ln(1-t)}{t^2} - \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{1-t} \right] e^{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)} = \left[\frac{\ln(1-t)}{t^2} + \frac{1}{t} \right] \varphi(t).$$

Le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1-t)$ est connu. On a :

$$\frac{\ln(1-t)}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2} \left(- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} + t \right) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+2}.$$

Ce qui précède montre que si l'on pose : $\forall t \in]-1, 1[$, $\psi(t) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+2}$, alors :

$$\forall t \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad \varphi'(t) = \psi(t) \varphi(t).$$

Justifions que l'identité s'étend en 0. On a, par la question **Q 23** et la continuité des fonctions développables en série entière : $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) \varphi(t) = -\frac{e}{2}$. De plus φ est continue sur $] - 1, 1[$ et dérivable sur $] - 1, 1[\setminus \{0\}$, donc par le théorème de la limite de la dérivée φ est de classe C^1 sur $] - 1, 1[$ et on a : $\varphi'(0) = -\frac{e}{2}$. Ainsi l'égalité ci-dessus reste valable pour $t = 0$.

Comme ψ est indéfiniment dérivable sur $] - 1, 1[$ en tant que fonction développable en série entière sur cet intervalle, une récurrence facile partant de l'identité $\varphi' = \psi \varphi$ permet de démontrer que φ est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc que φ est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$. De plus, par la formule de dérivation de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(n+1)}(0) = (\varphi')^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^{(k)}(0) \varphi^{(n-k)}(0).$$

Or une fonction développable en série entière est égale à la somme de sa série de Taylor, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = -\frac{1}{k+2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k!}{k+2} \varphi^{(n-k)}(0).$$

D'où le résultat, quitte à changer n en $n-1$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Q 26. Utilisons la méthode de l'équation différentielle. L'application φ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= \psi \cdot y, \\ y(0) &= e. \end{cases} \quad (E)$$

Or il en est de même de l'application $f : t \mapsto -e \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$. En effet, elle est bien dérivable (terme à terme) sur $] -1, 1[$, et en effectuant le produit de Cauchy des séries entières dont les sommes donnent ψ et f respectivement (ce qui suit est licite car ces deux séries entières sont de rayon de convergence au moins 1) :

$$\begin{aligned} \forall t \in] -1, 1[, \quad \psi(t)f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n -\frac{1}{k+2} \cdot (-eb_{n-k}) \right) t^n \\ &= e \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} b_{n+1-k} \right) t^n \\ &= -e \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} t^n \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

De plus : $f(0) = e$. Ainsi f vérifie (E) également. Par l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy (théorème de Cauchy linéaire) on a : $\varphi = f$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad \varphi(t) = -e \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k = e \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k \right).$$

III.B – Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Q 27. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a, par l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k c_k) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

donc, étant donné que $c_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k c_k \cdot \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Il suffit alors de sommer cette égalité de $n = 1$ à $+\infty$ (ce qui est licite même sans hypothèse de convergence puisque chaque terme général est positif), puis d'utiliser le théorème de Fubini positif,

pour avoir le résultat :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k c_k \cdot \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,n]}(k) \frac{1}{n} a_k c_k \cdot \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,n]}(k) \frac{1}{n} a_k c_k \cdot \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} a_k c_k \cdot \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}}.
 \end{aligned}$$

Q 28. Conformément à l'énoncé, on pose $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cela définit bien une suite de réels strictement positifs. On reconnaît alors un produit télescopique :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}} \right)^{-\frac{1}{n}} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \cdot (n+1)^{-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{(k+1)^k}{k^k} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)^{1-k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi \left(\frac{1}{k+1} \right).
 \end{aligned}$$

Par la question **Q 27** on a donc, quitte à renommer les indices :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} \right)$$

d'où le résultat.

Q 29. Nous allons démontrer que $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par récurrence forte sur n . On a : $b_1 = \frac{1}{2} \geq 0$, ce qui initialise la propriété.

Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_k \geq 0$. D'après la relation de récurrence vérifiée par cette suite, on a :

$$(n+1)b_{n+1} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k+1} = - \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{n-k+2}.$$

On a une relation analogue pour nb_n . On en déduit :

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)b_{n+1} - (n+1)nb_n &= -\frac{(n+2)b_n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n+1}{n+1-k} - \frac{n+2}{n+2-k} \right) b_k \\ &= -\frac{(n+2)b_n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{(n-k)(n-k+1)} b_k \\ &\geq -\frac{(n+2)b_n}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$(n+2)(n+1)b_{n+1} \geq \frac{2(n+1)n - (n+2)}{2} b_n = \frac{2n^2 + n - 2}{2} b_n.$$

Or le polynôme $2X^2 + X - 2$ a pour discriminant $\Delta = 17 > 0$. Ses racines sont donc $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < 0$. On a :

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4} < \frac{-1+\sqrt{25}}{4},$$

c'est-à-dire : $\frac{-1+\sqrt{17}}{4} < 1$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a : $2n^2 + n - 2 > 0$. L'inégalité ci-dessus implique donc : $b_{n+1} \geq 0$, ce qui clôt l'hérédité.

Ainsi on a $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par principe de récurrence, et l'inégalité est stricte pour au moins une valeur de n (par exemple $b_1 = \frac{1}{2} > 0$; en fait, la récurrence ci-dessus montre que b_n est strictement positif pour tout n non nul). Cela prouve :

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} \right) < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

et donc que l'inégalité de Carleman-Yang fournit un meilleur majorant de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}$ que celle de Carleman.