Questions de cours aux écrits... à savoir refaire rapidement !

L'objectif de cette planche est de mettre en avant 50 résultats qui peuvent vous être demandés aux écrits. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche, mais de bien de savoir refaire la preuve rapidement.

Chapitre 1

Propriété 1 (de la trace).

1. L'application $tr : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto tr(M) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $tr(AB) = tr(BA)$.

► *Il suffit de revenir aux coefficients diagonaux...*

Théorème 2 (décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tels que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

► *Pour le premier point, on essaie de les écrire sous forme de $Vect$. Il suffira alors de revenir à la caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.*

Propriété 3 (endomorphismes qui commutent).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et considérons $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, on a :

$$\begin{cases} Ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ sont stables par } g \\ Ker(g) \text{ et } Im(g) \text{ sont stables par } f \end{cases}$$

► *On revient à la définition d'un sous-espace stable.*

Corollaire 4 (cas particulier des projecteurs et des symétries).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et considérons f un projecteur de E et s une symétrie vectorielle de E. Alors, il existe des bases B et B' de E dans lesquelles on a :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \text{ et } Mat_{B'}(s) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

► *On revient aux décompositions sous-jacentes de l'espace E, et on construit une base adaptée à ces décompositions.*

Chapitre 2

Théorème 5 (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons ϕ un produit scalaire sur E. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\phi(x, y)| \leq \|x\|_2.\|y\|_2$$

► *Si x est nul, c'est immédiat. Sinon, on distingue les cas réel et complexe. Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut introduire la fonction polynôme $P(\lambda) = \|\lambda x + y\|_2^2$ et invoquer le signe de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, z) \in \mathbb{C} \times x^{\perp}$ tel que $y = \lambda x + z$, puis on en déduit l'inégalité à l'aide du théorème de Pythagore.*

Propriété 6 (convergente donc bornée)**.**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, toute suite convergente est bornée.

▶ *On traduit la convergence d'une telle suite pour $\epsilon = 1 > 0$, puis on majore $\|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\|$ à partir d'un certain rang.*

Propriété 7 (comparaison des normes usuelles sur l'espace des n-uplets)**.**

On se place dans $E = \mathbb{K}^n$ et on rappelle que les applications suivantes définissent des normes usuelles :

$$\|.\|_1 : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|.\|_2 : x \in E \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|.\|_\infty : x \in E \longmapsto \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

De plus, on a pour tout $x \in E$,

$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2$$

et ainsi, ces trois normes sont équivalentes.

▶ *Pour les premières inégalités, il suffit d'encadrer la norme-1 ou 2. La dernière est obtenue par simple transitivité.*

Chapitre 3

Propriété 8 (nature des séries de Riemann de paramètre réel)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **série de Riemann** toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^x}$ et on a :

$$\sum \frac{1}{n^x} \text{ converge } \Leftrightarrow x > 1$$

Et dans ce cas, on définit la fonction *zeta* de Riemann sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

▶ *On raisonne par disjonction des cas en écartant rapidement les cas $x < 0$ et $x = 0$ pour lesquels la série diverge grossièrement. Le reste tombe alors par comparaison série-intégrale.*

Théorème 9 (de Césaro)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose convergente de limite ℓ. Alors, la **moyenne de Césaro** associée est convergente de sorte que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

▶ *On revient à la définition de la limite et on cherche à contrôler la différence $|(1/n)\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell|$ en séparant la somme obtenue.*

Propriété 10 (équivalents du reste partiel ou de la somme partielle associée aux séries de Riemann).

On considère la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Alors, on rappelle que la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus,

1. si $\alpha = 1$, alors la série diverge et on a : $S_n \sim \ln(n)$.
2. si $0 < \alpha < 1$, alors la série diverge et on a : $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
3. si $\alpha > 1$, alors la série converge et on a : $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

▶ *Le premier point a déjà été traité : c'est l'exemple de la série harmonique. Pour les deux autres points, on travaille par comparaison série-intégrale avec* $f : t \longmapsto 1/t^\alpha$ *strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

Propriété 11 (critère spécial des séries alternées).

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une série alternée, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leq 0$. On suppose de plus que la suite $(|u_n|)$ est décroissante avec $|u_n| \longrightarrow 0$. Alors,

1. la série $\sum u_n$ est convergente.
2. on peut contrôler le reste partiel en valeur absolue et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$$

▶ *Pour le premier point, il suffit de montrer que les suites extraites* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes, avant d'invoquer le théorème de convergence des suites adjacentes. Pour le second point, on distingue alors les cas* $n = 2p$ *et* $n = 2p+1$ *à partir de l'encadrement fourni par le théorème de convergence des suites adjacentes.*

Chapitre 4

Corollaire 12 (inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1).

Soit f une fonction qu'on suppose de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq \|f'\|_\infty |b - a|$$

▶ *C'est immédiat : cela découle du théorème fondamental de l'analyse appliqué à la fonction dérivée. En effet,*

$$|f(b) - f(a)| = |\int_a^b f'(t)\,dt| \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt \leq \int_a^b \|f'\|_\infty\,dt = \|f'\|_\infty |b - a|$$

Théorème 13 (de convergence des sommes de Riemann)**.**

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et considérons (x_i) la subdivision à pas constant $(b-a)/n$. On appelle **somme de Riemann** associée toute somme de la forme :

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(\theta_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{b-a}{n})f(\theta_i)$$

où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

1. Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
2. De la même façon, si f est seulement continue sur $[a,b]$, alors on a encore :

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$$

► *Dans les deux cas, on étudie la différence $|S_n(f) - \int_a^b f|$ et il faudra contrôler la différence entre deux images que ce soit à l'aide de l'inégalité des accroissements finis ou en invoquant l'uniforme continuité.*

Propriété 14 (intégrales de Riemann de paramètre réel)**.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

► *Dans les deux cas, on introduit la fonction $f : t \longmapsto 1/t^\alpha$ et on se ramène à cran fini pour discuter de l'existence de la limite.*

Chapitre 5

Théorème 15 (formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors, on a :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

La fonction polynôme $T_{n,a} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$ représente le **polynôme de Taylor de degré** n associé à la fonction f au point a.

► *On procède simplement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ dans laquelle on mettra en place une intégration par parties bien choisie.*

Propriété 16 (condition suffisante pour une fonction de classe C^∞ sur un intervalle réel)**.**

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I, contenant un voisinage de 0, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose de plus qu'il existe $r > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-r, r[,\ |f^{(n)}(x)| \leq M$$

Alors, f est développable en série entière sur $]-r, r[$ et :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

▶ *Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, et on montre que le reste intégral définit une suite de fonctions qui converge simplement vers 0.*

Théorème 17 (existence et unicité du polynôme d'interpolation)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et considérons $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ des points de I. Alors, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(x_k) = f(x_k)$$

▶ *On peut proposer 4 façons de faire... de l'isomorphisme à l'analyse-synthèse.*

Chapitre 6

Théorème 18 (de décomposition des noyaux)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère de plus $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on suppose premiers entre eux, alors on a la décomposition :

$$Ker(PQ(f)) = Ker(P(f)) \oplus Ker(Q(f))$$

▶ *On revient à la caractérisation d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires, mais on pensera d'abord à invoquer le théorème de Bézout pour obtenir une relation entre $P(f)$ et $Q(f)$.*

Propriété 19 (valeurs propres et polynômes d'endomorphismes en f)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, x un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :
$$P(f)(x) = P(\lambda).x$$
et ainsi, x représente un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.
2. Si de plus P est un polynôme annulateur de f, alors $P(\lambda) = 0$, et ainsi, on a toujours :
$$Sp_{\mathbb{K}}(f) \subset \text{Racines}_{\mathbb{K}}(P)$$

▶ *Pour le premier point, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x) = \lambda^n.x$, puis on calcule $P(f)(x)$. Le second point est immédiat puisque $x \neq 0_E$, en tant que vecteur propre de f.*

Propriété 20 (liberté des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de valeurs propres distinctes. Alors,

1. toute famille de vecteurs propres associés à $(\lambda_i)_{i \in I}$ est libre.
2. toute somme finie de sous-espaces propres associés est directe.

▶ *Pour le premier point, on montre par récurrence que toute sous-famille finie de n vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Pour le second point, on revient à l'unicité de la décompsoition du 0_E.*

Théorème 21 (condition nécessaire et suffisante de diagonalisation à l'aide d'un polynôme annulateur)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est diagonalisable si et seulement si f annule un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$.

▶ *On procède par double implication. Le sens direct est immédiat puisque le polynôme minimal convient. Pour le sens réciproque, on invoque encore le théorème des noyaux pour exhiber une décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres.*

Propriété 22 (propriété algébrique pour deux matrices qui commutent).

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, on a :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

▶ *Les séries* $\sum A^k/k!$ *et* $\sum B^k/k!$ *étant absolument convergentes, on peut invoquer le théorème relatif au produit de Cauchy.*

Propriété 23 (cas particulier d'une matrice diagonalisable).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose diagonalisable. Alors, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale de coeffients $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors, on a immédiatement par opérations sur les matrices diagonales :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi, $\exp(A)$ est aussi diagonalisable et $Sp_{\mathbb{K}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda_i},\ \lambda_i \in Sp_{\mathbb{K}}(A)\}$, avec le même ordre de multiplicité pour les valeurs propres distinctes.

▶ *On se ramène à cran fini afin d'opérer sur les coefficients et on reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle.*

Chapitre 7

Théorème 24 (caractérisation de la continuité pour les applications linéaires).

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

1. f est lipschitzienne sur E.
2. f est continue sur E.
3. f est continue en 0_E.
4. f est bornée sur la boule unité fermée : $\exists\, k \geq 0,\ \forall x \in B_f(0_E, 1),\ \|f(x)\|_F \leq k$.
5. il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

▶ *On procède là encore par cycle, et on n'hésitera pas à normaliser les vecteurs pour rentrer dans la boule unité.*

Propriété 25 (norme subordonnée d'une application linéaire continue).

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qu'on suppose continue sur E. Alors, les réels M_1, M_2 et M_3 définis par :

$$M_1 = \sup\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \neq 0_E\}\ ,\ M_2 = \sup\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}\ ,\ M_3 = \sup\{\|f(x)\|_F,\ \|x\|_E = 1\}$$

existent et on a $M_1 = M_2 = M_3$. Ce réel sera aussi noté $|||f|||$ et il désigne la **norme de f subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$**.

En particulier, on vérifie que celle-ci est **sous-multiplicative** : si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||$.

▶ *L'existence est immédiate à l'aide des axiomes d'existence sur* $\mathbb{R}$. *Pour les égalités, on travaille simplement par anti-symétrie. Restera à prouver la sous-multiplicativité.*

Théorème 26 (cas particulier des applications linéaires en dimension finie).

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si de plus, E est de dimension finie $n \geq 1$, alors toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est nécessairement continue.

► *On revient à la caractérisation pour les applications linéaires, puis on cherche à contrôler $\|f(x)\|_F$ à l'aide de la norme infinie avant de conclure par équivalence des normes en dimension finie.*

Théorème 27 (cas particulier des parties compactes en dimension finie).

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et considérons K une partie non vide de E. Si de plus, E est de dimenison finie $n \geq 1$, alors les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

► *Le sens direct a été prouvé plus tôt. Pour le sens réciproque, on n'hésitera pas à réinvestir le théorème de Bolzano-Weierstrass vu au chapitre 2.*

Chapitre 8

Théorème 28 (d'intégration de la limite uniforme d'une suite de fonctions définies sur un segment).

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,
- (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\, dt$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ quand $n \to +\infty$ de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

► *On note $I_n = \int_a^b f_n(t)\, dt$ et on majore la différence $\|I_n - \int_a^b f(t)\, dt\|$ grâce aux propriétés de l'intégrale.*

Corollaire 29 (dérivation de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,
- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f,
- (f_n') converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$ vers une fonction g.

Alors, f est encore de classe C^1 sur I et on a $f' = g$.

► *Fixons $a \in I$, alors $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration des suites de fonctions définies sur un segment.*

Remarque Avec ces hypothèses, on montre qu'on récupère même la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de la suite (f_n) vers f. En effet, on a pour tout $x \in [a, b] \subset I$:

$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - f(a) + \int_a^x f_n'(t) - f'(t)\, dt \Rightarrow\ 0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n(a) - f(a)\| + (b-a)\|f_n' - f'\|_\infty \longrightarrow 0$$

Théorème 30 (de continuité des intégrales à paramètre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, X une partie de E et $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x, .)$ soit continue par morceaux sur I pour tout $x \in X$. On suppose de plus que :

- la fonction $f(., t) : x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur X pour tout $t \in I$,
- il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall\,(x, t) \in X \times I,\ |f(x, t)| \leq \phi(t) \quad \text{(indépendante de } x\text{)}$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x, t)\,dt$ est continue sur X.

▶ *Fixons $a \in X$ et $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$. On se ramène à la caractérisation séquentielle de la limite en montrant que $F(x_n) \longrightarrow F(a)$ à l'aide du théorème de convergence dominée.*

Chapitre 9

Théorème 31 (lemme d'Abel).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe, avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose de plus qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

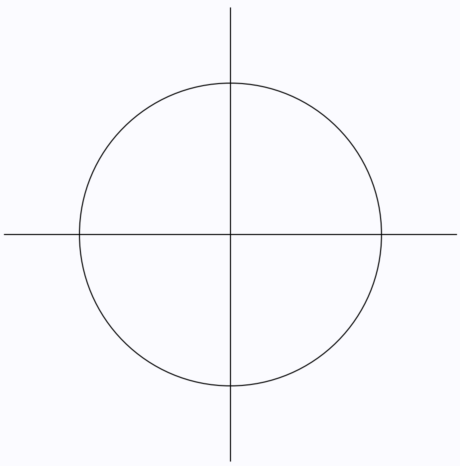
▶ *On se ramène à une comparaison avec le terme général d'une série géométrique convergente.*

Propriété 32 (autres interprétations du rayon de convergence).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et notons R son rayon de convergence. Alors,

1. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ a_n r^n \longrightarrow 0\}$.
2. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum a_n r^n \text{ converge}\}$.
3. R désigne aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum |a_n r^n| \text{ converge}\}$.

et finalement, on pourra retenir que dans le plan complexe :



▶ *Tous ces ensembles contenant au moins 0, on peut noter R_0, R_1, R_2 les bornes supérieures de ces ensembles dans $\overline{\mathbb{R}}$ et montrer que $R \geq R_0 \geq R_1 \geq R_2$ puis que $R = R_2$, et ainsi on aura bien les égalités attendues.*

Théorème 33 (de convergence normale d'une série entière)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe et de rayon de convergence $R > 0$. Alors,

1. pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement, et donc uniformément sur la boule fermée $B_f(0, r)$.
2. plus généralement, elle converge normalement, et donc uniformément sur tout compact $K \subset B(0, R)$.

▶ *Pour le premier point, c'est immédiat car il suffit de majorer le terme général $|a_n z^n|$. Pour le second point, on pourra appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $z \mapsto |z|$, avant de majorer le terme général.*

Corollaire 34 (unicité des coefficients du développement en série entière)**.**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série entière. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Et ainsi, les coefficients du développement en série entière sont uniques.

▶ *On utilise la formule de dérivation sur $B(0, R)$ et on évalue en $x = 0$.*

Chapitre 10

Propriété 35 (indépendance et évènements contraires)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si de plus A et B sont indépendants, alors :

$$\begin{cases} A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \end{cases}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille d'évènements mutuellement indépendants, alors en notant $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, les évènements $(B_i)_{i\in I}$ sont encore mutuellement indépendants.

▶ *Pour le premier point, il suffit de revenir à la définition à l'aide du produit des probabilités.*

Théorème 36 (caractérisation d'une loi géométrique)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. On considère X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que $X \sim \mathcal{G}(p), p \in]0, 1[$.
   Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$ et ainsi,
   $$\forall\, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2,\ P_{(X>k)}(X > k + \ell) = P(X > \ell) \quad (*)$$
   On dit que X est une **loi sans mémoire**.
2. Réciproquement, considérons Y telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Si de plus Y vérifie la condition $(*)$, alors Y suit une loi géométrique de paramètre $p = P(Y = 1)$.

▶ *Pour le premier point, il suffit de décrire l'évènement $(X > k)$ comme réunion d'évènements élémentaires, la formule déécoule alors de la définition de la probabilité conditionnelle. Pour le second point, on cherche d'abord à obtenir une relation de récurrence qui nous permettra d'obtenir $P(Y = k)$.*

Théorème 37 (approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et considérons (X_n) une suite de variables aléatoires telles que X_n suit une loi binomiale de paramètres n, p_n vérifiant :

$$np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda > 0$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, et ainsi la suite (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson.

▶ *On revient à la loi binomiale et on travaille sur le coefficient binomial afin de déterminer la limite à l'aide des fonctions usuelles.*

Exemple 1 On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$X \text{ admet une espérance finie} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} P(X > n) \text{ converge}$$

et que dans ce cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Propriété 38 (fonction génératrice de la somme de variables mutuellement indépendantes)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et notons G_{X_k} leur fonction génératrice. On suppose de plus que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et ainsi,

$$\forall\, t \in [-1, 1],\ G_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$$

▶ *On revient simplement à la définition de la fonction génératrice et on rappellera les propriétés de l'espérance.*

Propriété 39 (inégalité de Markov)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète telle que $X \in L^1$. Alors, on a :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(|X|)}{\epsilon}$$

▶ *On note $J = \{i \in I,\ |x_i| \geq \epsilon\}$ et il suffit alors de minorer l'espérance de $|X|$.*

Propriété 40 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète telle que $X \in L^2$ converge. Alors, on a :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

▶ *On applique l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$ avec ϵ^2.*

Chapitre 11

Propriété 41 (expression du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie)**.**

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E. On suppose de plus que F est de dimension finie $p \geq 1$. Alors, en notant $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F, on a pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > .e_i$$

▶ *On applique la caractérisation précédente de sorte que $x - y \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x - y, e_i >= 0$.*

Théorème 42 (de minimisation).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$. Alors, la distance de x à F est atteinte en un unique point de F et on a :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|_2 = \sqrt{\|x\|_2{}^2 - \|p_F(x)\|_2{}^2}$$

▶ *Dans un premier temps, on vérifie que $\|x - p_F(x)\|_2$ est bien ce minimum, puis partant de $x = p_F(x) + x - p_F(x)$, on applique le théorème de Pythagore pour justifier la valeur obtenue.*

Théorème 43 (de représentation de Riesz).

Soit E un espace euclidien, et considèrons ϕ une forme linéaire sur E. Alors, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \phi(x) = < x, a >$$

En particulier, l'application $f : a \longmapsto < ., a >$ désigne un isomorphisme de E sur E^*, et ainsi toute forme linaire peut être vu comme un produit scalaire relatif à un unique vecteur associé.

▶ *On introduit une base orthonormée de E et on procède par analyse-synthèse.*

Propriété 44 (noyau et image de l'adjoint).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, on a :

$$Ker(u^*) = Im(u)^\perp \text{ et } Im(u^*) = Ker(u)^\perp$$

▶ *Pour la première égalité, on peut raisonner par équivalence. Pour la seconde, on pourra proposer une inclusion et revenir à l'égalité des dimensions.*

Propriété 45 (éléments propres d'un endomorphisme symétrique).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in S(E)$. Alors,

1. le spectre de u est réel et ainsi, $Sp(u) \subset \mathbb{R}$.
2. u possède au moins une valeur propre réelle et ainsi, $1 \leq Card(S_p(u)) \leq n$.
3. en notant $E_u(\lambda_1), \dots, E_u(\lambda_p)$ les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u, alors ils sont deux à deux orthognaux, et ils sont donc toujours en somme directe.

▶ *Pour le premier point, on se plonge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pourra travailler sur l'égalité $Mat_B(u)X = \lambda_i X$ après avoir fixé une base orthonormée de E. Le second point est immédiat et pour le dernier, on reviendra simplement à la définition de l'orthogonalité.*

Propriété 46 (caractérisation des matrices symétriques positives et définies positives).

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors, on a les caractérisations suivantes :

1. $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(A),\ \lambda \geq 0$
2. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(A),\ \lambda > 0$

▶ *A chaque fois, on raisonne par double implication : le sens direct est immédiat, car il suffit de présenter un vecteur propre associé. Pour le sens réciproque, on pourra évidemment invoquer le théorème spectral.*

Corollaire 47 (caractérisation d'un automorphisme orthogonal par conservation de la norme et du produit scalaire)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est un automorphisme orthogonal.
2. pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_2 = \|x\|_2$ et ainsi, u conserve la norme.
3. pour tout $(x, y) \in E^2$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$ et ainsi, u conserve le produit scalaire.

On dit aussi que u est une **isométrie vectorielle**.

▶ *On procède par cycle et on n'hésitera pas à exploiter le résultat précédent pour prouver la dernière implication.*

Chapitre 12

Propriété 48 (structure des solutions)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$$

avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I. On note S l'ensemble des solutions du système différentiel et S_0 l'ensemble des solutions du système homogène associé. Alors,

1. S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et ainsi il existe des solutions du système homogène $X_1, \dots, X_n$ linéairement indépendantes telles que : $S_0 = Vect(X_1, \dots, X_n)$.
2. Si de plus Y_p désigne une solution particulière du système différentiel linéaire, alors :

$$S = \{Y_p + \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

On peut alors écire $S = Y_p + S_0$ et on dit que S est un **espace affine** de direction S_0.

▶ *Pour le premier point, on revient à la caractérisation des sev puis on construit un isomorphisme de S_0 sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Pour le second point, on peut travailler par équivalence à partir de $X \in C^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$.*

Propriété 49 (caractérisation d'un système fondamental de solutions à l'aide du wronskien)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$, avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I, et on note $X_1, \dots, X_n$ des solutions du système homogène associé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de S_0
2. $\forall\, t \in I,\ W(t) \neq 0$
3. $\exists\, t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$

▶ *On procède simplement par cycle et on pourra pour la première implication raisonner par l'absurde.*

Propriété 50 (expression de S_0 à l'aide de l'exponentielle dans le cas où A est constante)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continue sur I. Alors, les solutions du système homogène sont données par :

$$X(t) = \exp(tA)X_0 \text{ avec } X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

▶ *On utilise la facteur intégrant et on pourra rappeler $t \longmapsto \exp(tA)$ est dérivable. Attention, il ne faudra pas oublier de justifier que $\exp(tA)$ est inversible avant d'exprimer $X(t)$.*