

Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'examineur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examineur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (matrices de rang 1).

extrait du concours X/ENS 2025 - PC []

Les coefficients d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans ce sujet, les vecteurs sont notés en gras, et sont identifiés à des matrices colonnes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

1. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. On pose $M = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$. Montrer que M est une matrice carrée de taille $n \times n$, de rang 1.
2. Calculer avec justification le rang de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Réciproquement, soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $K = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$.
4. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbf{u} \mathbf{v}^T = \mathbf{x} \mathbf{y}^T$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}$$

5. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$.
 - (a) Montrer que $\text{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
 - (b) Montrer que $K^2 = \text{Tr}(K) K$.
 - (c) En déduire que K est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(K) \neq 0$.
6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\mathbf{y}\| = 1$ tels que $P = \mathbf{y} \mathbf{y}^T$.

Exercice 2 (matrices circulantes).

extrait du concours Centrale 2018 - PSI []

Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice de Toeplitz définie par :

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'ensemble des matrices de Toeplitz noté $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Une matrice circulante est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, t_k = t_{-n+k}$. C'est à dire qu'elle est de la forme :

$$T(t_1, t_2, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

- Calculer $M_n^2, \dots, M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n .
- Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n .
- On pose $\Phi_n = \left(\omega_n^{(p-1)(q-1)} \right)_{1 \leq p, q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$.
- Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.
- Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.
- Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.
- Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

Exercice 3 (représentation Ae^A d'un bloc de Jordan).

extrait du concours Mines/Ponts 2014 - MP []

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A , et on note $\exp(A)$ ou e^A , la matrice $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Enfin, on appelle bloc de Jordan d'ordre n associé au nombre complexe λ , la matrice :

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On note $D = \{Re^{i\theta}; R > 0; 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et on admet que l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$ est surjective. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n .

- Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre.
- En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.
- Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .
- Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\bar{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \bar{N}e^{\bar{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

- Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et montrer que l'on peut écrire:

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ .

6. Montrer que $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n . En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^{M\lambda}$.

Exercice 4 (une autre expression de la constante d'Euler).

extrait du concours Centrale 2024 - PSI []

Dans toute ce problème, on désigne par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

- Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1} - a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.
- En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ , puis que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $\int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n}$, exprimer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du$$

- On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} & \text{si } 1 \leq t \leq n \\ 0 & \text{si } n < t \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Établir la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.
- Justifier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ des fonctions f_n définies dans la question précédente.
- Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$\int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du$$

- Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du$.

- À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1], 0 \leq \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \leq 1$$

- Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général :

$$\int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du$$

- En déduire que $\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

Exercice 5 (intégrales de Wallis et intégrale de Gauss).

extrait du concours Centrale 2024 - PSI []

- Tout au long du sujet, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à sa fonction polynomiale.
- Pour une famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle $\text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille, c'est-à-dire :

$$\text{vect}(P_n, n \in \mathbb{N}) = \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}, g = \sum_{k=0}^N a_k P_k \right\}$$

I. A -

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Étudier la monotonie de la suite (W_n) .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
4. En déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

I. B -

On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

5. Justifier l'existence de I .
6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$.
7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin u$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

8. En déduire la valeur de I puis de J .

Exercice 6 (les polynômes d'Hermite).

extrait du concours Centrale 2024 - PSI []

III. A - Les polynômes d'Hermite.

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$$

où $w^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de w .

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}, H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est un polynôme de degré n dont vous déterminerez la parité.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de H_n .

III.B - Un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-x^2} dx$ converge.

5. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

6. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à tout $(f, g) \in E^2$ associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

III. C - Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

7. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle$$

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] : (P | H_n) = 0$.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

10. Montrer : $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$.

11. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.