

Planche de préparation pour les écrits

L'examinateur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (puissances itérées d'une matrice).

extrait du concours CCINP 2023 - PSI []

On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $M_k \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left((m_{i,j}^{(k)})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} \right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\| \cdot \|$ indifféremment des valeurs de n et p . En particulier, si $V \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes:

1. La suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j})$.
2. La suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket$, la suite de nombres complexes $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a,b) \in M_n(\mathbb{C})$ par:

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$ et on rappelle qu'il est défini par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, P_{a,b}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M(a,b))$$

On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b ,

$$M(a,b) = bI_n + aM(1,0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la transposée $M(a,b)^T$, puis justifier alors que $M(a,b)$ est diagonalisable.

2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ et déterminer la valeur propre λ telle que $M(a,b)V = \lambda V$.

3. Montrer que : $P_{1,0}(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$.

4. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que : $P_{a,b}(\lambda) = a^n P_{1,0}\left(\frac{\lambda - b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.

5. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par : $Q_{a,b}(\lambda) = (\lambda - (b-a))(\lambda - (b + (n-1)a))$.

Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n .

7. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b + (n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $(M(a,b)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2 (commutant d'une matrice donnée).

extrait du concours Centrale 2021 - TSI []

On définit le commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$$

On note encore $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à A . On suppose de plus que :

$$\prod_{i=1}^n (f - \lambda_i \cdot \text{id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ distincts}$$

Diagonalisation de A et propriétés préliminaires

1. En reconnaissant un polynôme annulateur de f , établir que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(f - \lambda_i \cdot \text{id})$.
2. Justifier alors qu'il existe P_2 une matrice inversible telle que :

$$A = P_2 D P_2^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. Démontrer que pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$,

$$\text{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n)) = \Pi(D)$$

4. On considère l'application :

$$\theta : \Pi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que θ est un isomorphisme.

5. En déduire que pour tout n -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$.

Vers le commutant de A Soit M' une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $[M'D]_{ij}$ et $[DM']_{ij}$.
7. Démontrer que M' appartient à C_D si et seulement s'il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $M' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
8. Déterminer une base de C_D , puis préciser la dimension de C_A .

Soit M une matrice appartenant à C_A et on pose $M' = P_2^{-1} M P_2$.

9. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M' = Q(D)$.

10. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_2 D P_2^{-1})^n = P_2 D^n P_2^{-1}$, puis justifier que pour tout $\Pi \in \mathbb{R}[X]$,

$$\Pi(P_2 D P_2^{-1}) = P_2 \Pi(D) P_2^{-1}$$

11. En déduire que $M = Q(A)$, puis comparer C_A à l'ensemble des polynômes matriciels en A .

Exercice 3 (polynômes de Laguerre).

extrait du concours CCINP 2019 - PC []

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'on peut généraliser la notion d'intégrales, et si f désigne une fonction continue sur un intervalle I , alors on note $\int_I f(t) dt$ l'intégrale sur I .

En particulier, si on se place sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, alors on a par définition :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(t) dt$$

D'ailleurs, si la limite existe et est finie, on dit que **l'intégrale généralisée est convergente** et sa valeur n'est rien d'autre que la limite obtenue.**Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$** **I.1 - Généralités**Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et qu'elle désigne un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

3. Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(X^k | 1) = k!$

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

4. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\alpha(X^k)$. En déduire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
6. Calculer le polynôme caractéristique χ_α de α , puis montrer que les valeurs propres de α sont données par :

$$\{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

7. Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton, puis justifier que :

$$\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n \text{Ker}(\alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$$

8. Expliquer alors pourquoi $\dim(\text{Ker}(\alpha + k \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
9. Justifier que P_k est de degré k .
10. Déterminer P_0 et P_1 .

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

11. Montrer que $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.
12. En déduire que $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$.
13. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les questions 8 et 12.

Exercice 4 (matrices nilpotentes).

extrait du concours Centrale 2022 - PSI []

Il existe de nombreuses matrices qu'on peut réduire. Parmi celles-ci, on rappelle que toute **matrice nilpotente** est semblable à une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls. Ainsi, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

1. Démontrer que l'application $\text{tr} : M \mapsto \text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et que pour toutes matrices A, B ,

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

2. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

3. En déduire que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T A = 0_n$ alors $A = 0_n$.

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose nilpotente. Déterminer la trace et le déterminant de A .

5. Montrer que, si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.
6. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que MN et $M+N$ sont nilpotentes.
7. On suppose que M , N et $M+N$ sont nilpotentes. En calculant $(M+N)^2 - M^2 - N^2$, montrer que $\text{tr}(MN) = 0$.
8. Démontrer qu'une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $\det(M) = \text{tr}(M) = 0$.
9. Montrer que la seule matrice réelle nilpotente et symétrique est la matrice nulle.
10. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^T A = 0_n$, puis que $A = 0_n$.
11. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant nul, mais non nilpotente.

Exercice 5 (approximation de $\ln(2)$).

extrait du concours E3A 2016 - PSI []

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{n2^{n+1}n!}$$

5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.
 (b) Rappeler la formule de Stirling.
 (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.
6. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x) dx$.
 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. On note sous réserve d'existence $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$.
 (a) Justifier que l'intégrale J est bien définie, et en utilisant un changement de variable, montrer que $I = J$.
 (b) En calculant $I + J$, retrouver la valeur de I .
8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$.
 (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers la fonction $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\mapsto -2 \ln(\cos(x))$, c'est à dire à x fixé, justifier que :

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \ln(\cos(x))$$

- (b) En faisant appel au **théorème de convergence dominée (*)**, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$.
9. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 6 (autour de la constante d'Euler).

extrait du concours CCINP 2022 - PC []

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

et on cherche à montrer que cette suite est convergente.

1. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$, justifier rapidement que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
3. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans la question précédente, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé **constante d'Euler**. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}.$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

4. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, c'est à dire qu'à t fixé, $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t} \ln(t)$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$.
7. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u) du.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$

9. Justifier rapidement que $\lim_{u \rightarrow 1} (1-u) \ln(1-u) = 0$, puis établir que l'intégrale J_n existe si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du$$

existe.

10. Calculer l'intégrale précédente. En déduire que l'on a :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

11. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + n J_n.$$

12. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt.$$