

Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'examinateur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
 2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**
- (*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (cas particulier des séries entières).

extrait du concours Mines-Ponts 2022 - PC []

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1, 1[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

4. Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D . En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D .

Dans la suite, pour tout $z \in D$, on note

$$P(z) := \exp \left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(e^{-t}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

6. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.
7. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} du$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.
8. Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} du = \ln(n!) + (n-1) - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) = \ln \left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right) - 1.$$

9. Montrer que $\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(y)}{u} du$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 (étude des fonctions eulériennes).

extrait du concours Centrale 2015 - MP []

II.A. La fonction Γ

- II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.

On admettra que Γ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- II.A.2) Soient x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x .

II.B. La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

- II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

- II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

- II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

- II.B.4) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

II.C. Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

- II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

- II.C.2) Montrer que $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.

- II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y).$$

- II.C.4) Soit $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) du$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- II.C.5) Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

- II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathbb{C}^1$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, puis que G est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1} .

- II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

Exercice 3 (transformée de Fourier et formule d'inversion).

extrait du concours Centrale 2016 - PSI []

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1 Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de f*) définie par

$$\forall \xi, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

1.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

1.B On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ et } \psi(0) = 1$$

1.B.1 Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.B.2 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm} .

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}, (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$$

1.E On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, y'(\xi) = -2\pi \xi y(\xi)$$

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1$.

2 Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) dt$$

2.A Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

2.B Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

2.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} d\xi \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2i\pi\xi t} dt \right) d\xi$$

2.D Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

En déduire en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \quad (2.1)$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

Exercice 4 (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$).

extrait du concours Mines-Ponts 2020 - MP []

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d -uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas X* , à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d , au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ après n pas.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

3. Si $\alpha \in]0, 1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4. Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose $I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$. Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(I(x))$$

En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$. Justifier la formule :

$$\forall x \in] -1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in] -1, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n \text{ et } \forall x \in] -1, 1[, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) x^n$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1, 1]$ et que

$$G(1) = \mathbb{P}(R \neq +\infty)$$

7. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$, montrer que

$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

8. Montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, F(x) = 1 + F(x)G(x)$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R \neq +\infty)$.

9. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$$

L'élément A de $\mathbb{R}^{++}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in]1 - \alpha, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$.

10. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

11. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\})$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(R > i)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(R > i)$$

12. Conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n} = \mathbb{P}(R = +\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.

Par ailleurs, $p \in]0, 1[, q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = -1) = q$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n$$

14. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $G(x)$.
Exprimer $\mathbb{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.
Déterminer la loi de R .

15. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}$$

Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (inégalités en probabilité).

extrait du concours Centrale 2018 - MP []

- Dans tout le problème, N, k et d désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.
- Pour tous entiers naturels non nuls p et q , on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.
- On note A^T la transposée d'une matrice A .
- Pour tous entiers naturels p et q , avec $p \leq q$, la notation $\llbracket p, q \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leq i \leq q\}$.
- Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω .
- Pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout événement B , on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A .
- Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance.
- On dit qu'une variable aléatoire Z est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

- De façon générale, si E est un espace euclidien, son produit scalaire sera notés $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée sera notée $\| \cdot \|$ au lieu de $\| \cdot \|_2$ pour en faciliter l'usage.

I.A - Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien.

1. Soient a et b dans E . Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

2. En déduire que si u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u - v\| = \|u - v'\|$ alors

$$\left\| u - \frac{v + v'}{2} \right\| < \|u - v\|$$

3. Soient F un fermé non vide de E et u dans E . Montrer qu'il existe v dans F tel que

$$\forall w \in F, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

4. En déduire que si C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E alors il existe un unique v dans C tel que

$$\forall w \in C, \|u - v\| \leq \|u - w\|$$

On dira que v est le projeté de u sur C et on notera $d(u, C) = \|u - v\|$.

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Montrer que, pour tous réels positifs a et b ,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

On pourra utiliser la concavité du logarithme.

6. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p} \mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résultat lorsque $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.

I.C - Espérance conditionnelle

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.

Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de X sachant A , notée $\mathbb{E}(X|A)$, est par définition le réel

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_A(X = x) \cdot x$$

En d'autres termes, $\mathbb{E}(X|A)$ est l'espérance de X dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.

Les propriétés usuelles de linéarité et positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant A .

7. Soit $(A_1, \dots, A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X|A_i)$$

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout réel positif t ,

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq a \exp(-bt^2)$$

8. Montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = 2 \int_0^{+\infty} t \mathbb{P}(|X| \geq t) dt$$

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ avec $0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n$.

9. Montrer que le moment d'ordre deux de X est inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$.

Soit δ un réel tel que $0 \leq |\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$.

10. Justifier que, pour tout réel t ,

$$\mathbb{P}(|X + \delta| \geq t) \leq \mathbb{P}(|X| \geq t - |\delta|)$$

11. Montrer que, pour tout réel t ,

$$-b(t - |\delta|)^2 \leq a - \frac{t^2 b}{2}$$

12. En déduire que pour tout réel t tel que $t \geq |\delta|$ on a

$$\mathbb{P}(|X + \delta| \geq t) \leq a \exp(a) \exp(-\frac{1}{2}bt^2)$$

13. Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leq t < |\delta|$.

Exercice 6 (matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$).

extrait du concours Centrale 2022 - PSI []

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $V_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1, 1\}$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle. On définit la suite des puissances de M par

$$\begin{cases} M^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^{k+1} = MM^k \end{cases}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0_n$. On note N_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

Si U est une partie d'un espace vectoriel E , on note $Vect(U)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par U .

Toutes les variables aléatoires considérées dans les parties II, III et IV sont définies sur un même espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Étant donné une variable aléatoire réelle Z , on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance.

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant, connu sous le nom de lemme des coalitions.

II.B – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X + 1)$.

2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY .

II.C – Un premier procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Jusqu'à la fin de la partie II, n est un entier naturel non nul et $m_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$. La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est alors à valeurs dans $V_{n,n}$.

On pose $\tau_n = \text{tr}(M_n)$ et $\delta_n = \det(M_n)$.

4. Calculer l'espérance et la variance de la variable τ_n .
5. Calculer l'espérance de la variable δ_n .
6. Démontrer que la variance de la variable δ_n est égale à $n!$
On pourra développer δ_n selon une rangée et raisonner par récurrence.

Dans le cas particulier $n = 2$, m_{11} , m_{12} , m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

7. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in N_2$.
8. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

II.D – Une généralisation

L'objectif de cette sous-partie est de prolonger le dernier résultat de la partie précédente, en trouvant, dans le cas général où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, un minorant de la probabilité de l'événement $M_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

II.D.1) On considère $2n$ variables aléatoires réelles $c_1, c_2, \dots, c_n$ et $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$.

9. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Calculer $\mathbb{P}((c_1 = \varepsilon_1) \cap \dots \cap (c_n = \varepsilon_n))$.

On considère les matrices colonnes aléatoires $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$.

10. Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $(C(\omega), C'(\omega))$ est liée si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)$.
11. En déduire $\mathbb{P}((C, C') \text{ est liée})$.

II.D.2) On rappelle que $m_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$, que $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice aléatoire à valeurs dans $V_{n,n}$ dont, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est égal à $m_{i,j}$.

On note

$$C_1 = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, C_n = \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix}$$

les variables aléatoires à valeurs dans $V_{n,1}$ constituées par les colonnes de la matrice M_n .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note R_j l'événement $(C_1, \dots, C_j)$ est libre et $C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)$ et R_n l'événement $(C_1, \dots, C_n)$ est libre. .

12. Montrer que $(R_1, \dots, R_n)$ est un système complet d'événements.

II.D.3)

13. Montrer que

$$\mathbb{P}(M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)).$$

14. Justifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)) = \sum_{(v_1, \dots, v_j) \in V_{n,1}^j} \mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)) \mathbb{P}((C_1 = v_1) \cap \dots \cap (C_j = v_j)).$$

15. On admet le résultat obtenu dans une partie précédente qui n'est pas reprise ici : pour tout sous-espace vectoriel W de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d , on a $\text{card}(W \cap V_{n,1}) \leq 2^d$. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_j)) \leq 2^{j-n}.$$

16. En déduire que

$$\mathbb{P}(M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$