

Planche de préparation pour les écrits

L'examineur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
 2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examineur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**
- (*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (un peu d'arithmétique avec la fonction ζ).

extrait du concours CCINP 2021 - MP []

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Partie I - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.
2. Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?
4. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
5. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

6. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n . On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$.

Partie II - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a \mid b$.

7. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.
8. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1 \mid N, a_2 \mid N, \dots, a_n \mid N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \mid N$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1?

9. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements

$$[X \in a_1 \mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n \mathbb{N}^*]$$

sont mutuellement indépendants.

On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

11. Soit ω dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

12. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1, l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

Exercice 2 (calcul de $\zeta(2)$).

extrait du concours CCINP 2024 - MP []

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

1. Question préliminaire

Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

2. On note, pour tout entier naturel $n, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n .

En déduire, pour tout entier naturel n , que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Déterminer sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$.
4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}.$$

5. Justifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} dx.$$

6. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

7. Donner sur l'intervalle $] -1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$, puis calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$$

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

8. On pose pour $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$$

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

9. Établir que cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

10. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 (matrices de rang 1).

extrait du concours CCINP 2025 - MP []

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n , $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n .

Partie I – Exemples

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On définit les matrices aléatoires:

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = U \times U^\top = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \cdots & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \cdots & \cdots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

- On pose $Y = \text{rg}(M)$. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.
- Rappeler l'expression de $\text{Tr}(M)$, puis reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.
- Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement " M est une matrice de projection".
- Dans cette question, on suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement " M est une matrice de projection".
- On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).
- Donner (en justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II – Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

- On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.
- Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
- Déterminer le polynôme minimal de A , puis retrouver son polynôme caractéristique.
- Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \text{Tr}(A) \neq 0.$$

Exercice 4 (résolution d'une équation fonctionnelle).

extrait du concours CCINP 2021 - PC []

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de l'exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.

2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P)
5. Montrer que si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\epsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+ .
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

13. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt$.

Exercice 5 (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$).

extrait du concours CCINP 2020 - PC []

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.

Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2 .
3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n .
6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Dédurre de la question précédente que : $p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}$.

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geq 1$.
8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2 .
11. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.
14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.
16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Exercice 6 (les polynômes de Hermite).

extrait du concours CCINP 2025 - PC []

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

4. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
5. Justifier que v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
6. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.
7. En déduire que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est $\sqrt{\pi}$.

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n .
9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)f(x)$. On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.
10. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Montrer pour tout entier $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

11. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.
12. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p .