

Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'examinateur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
 2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**
- (*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (transformée de Fourier et produit de convolution).

extrait du concours Centrale 2021 - MP []

Dans cette partie,

- pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k -ième continue sur $\mathbb{R}$ (si $k = 0$, f est continue) ; on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$; – on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.
- on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$;
- pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

I Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle **transformée de Fourier** de f et on note $\hat{f}$ la fonction définie par une intégrale à paramètre de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x . Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ , exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ .

II Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g , et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la sous-partie II.B que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = (g * f)(x)$$

5. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$.
7. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dt \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dx \right) dt$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Exercice 2 (racine carrée d'une matrice symétrique positive).

extrait du concours Centrale 2024 - PC []

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $P^\top$ la transposée d'une matrice P . On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On note $O(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^\top P = I_q$.

I.A Approximation de $\sqrt{a}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $u_{n+1}^2 - a$ faisant intervenir $(u_n^2 - a)^2$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

I.B Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^\top M X \geq 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle **racine carrée** de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

4. Soit $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$, on note $Sp(M)$ le spectre de M . Montrer que $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$.
5. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
6. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.
On note alors de façon abusive $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M .

I.C Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le **théorème spectral**, il existe une matrice $P \in O(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^\top$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geq 0$, la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) \end{cases}$$
 est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M M_n^{-1}) \end{cases}$$

7. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^\top$$

8. En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

Exercice 3 (norme subordonnée et décomposition spectrale).

extrait du concours Mines-Ponts 2023 - MP []

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$ pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \dots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id$.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E .

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2. On note $|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leq |||u||| \cdot |||v|||$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k , en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k .

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

4. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r , des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \dots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

où pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $E_i = \text{Ker}(a - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbb{C}^n$, il existe un unique r -uplet $(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \dots \times E_r$ tel que $x = \sum_{i=1}^r x_i$. Fixons à présent $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & E_i \\ x & \longmapsto & x_i \end{cases} \quad \text{et} \quad q_i : \begin{cases} E_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x_i & \longmapsto & x_i \end{cases}.$$

Par ailleurs, on note $|||\cdot|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x \in E_i \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||\cdot|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leq C_i |||u|||_i.$$

6. Montrer que, pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, E_i est stable par a .

7. Soient $(i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^r q_i p_i$ en fonction des endomorphismes $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$ et id_{E_i} .

8. Montrer que : $a = \sum_{i=1}^r q_i a_i p_i$.

9. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^r q_i e^{ta_i} p_i$$

10. Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{ta_i}|||_i \leq \left| e^{t\lambda_i} \right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \text{id}_{E_i}|||_i^k.$$

11. En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{ta}|||_c \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \text{Re}(\lambda_i)}$$

où $\text{Re}(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z .

12. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A , vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On conservera la notation $|||\cdot|||_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et on utilisera $|||\cdot|||_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{tu_A}|||_r \leq |||e^{tv_A}|||_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A . Notons $g_{x_0} : t \mapsto e^{tu} x_0$ l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de :

$$\begin{cases} y' = u(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

13. Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$$

Exercice 4 (étude d'une fonction définie par un produit infini).

extrait du concours Centrale 2024 - PC []

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
- $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $] -1, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|), \quad \text{et sous réserve d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|.$$

On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0 .

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

3. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

4. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-nx^2})$.

5. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P'_n(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}.$$

8. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}$$

Exercice 5 (autour de la fonction Gamma).

extrait du concours Centrale 2024 - PC []

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que Γ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x)$$

4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

On admet que pour tout réel x , on a l'égalité (celle-ci a été démontrée dans la partie qui précède cet extrait) :

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

5. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

6. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

7. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$$

Exercice 6 (matrices stochastiques à coefficients strictement positifs).

extrait du concours Centrale 2021 - PSI

[] On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n . Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre en suivant les arêtes du graphe. A chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un des sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $t_{i,j}$ la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j . En particulier, on convient que $t_{i,j}$ est nul s'il n'y a pas d'arête et la matrice $(t_{i,j})$ est appelée *matrice de transition*. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne constitué des valeurs p_i^k la probabilité que le point soit au sommet i à l'étape de rang k .

Enfin, on donne quelques définitions :

- Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que X est une *distribution de probabilités* si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \geq 0$ et $x_1 + \dots + x_n = 1$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une *matrice stochastique* si chaque ligne est une distribution de probabilités.

I Résultats généraux

- Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_1^{(k)} + \dots + p_n^{(k)} = 1$.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$. En déduire une expression de $P^{(k)}$ en fonction de T , k et $P^{(0)}$.
- On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})$ converge vers un vecteur $P = (p_1, \dots, p_n)$. Montrer que $PT = P$ et que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i \geq 0$ avec $p_1 + \dots + p_n = 1$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
 - Montrer que M est stochastique si et seulement si $MU = U$, où U désigne le vecteur colonne constitué que de 1.
 - Montrer que MN est une matrice stochastique.
 - Montrer que $\alpha M + (1 - \alpha)N$ est une matrice stochastique.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons λ une valeur propre réelle ou complexe de M . On pose alors $(u_1, \dots, u_n)$ les composantes d'un vecteur propre u associé à λ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Soit $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|u_h| = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$. Montrer que $|\lambda - m_{hh}| \leq 1 - m_{hh}$. En déduire que $|\lambda| \leq 1$.
- Soit $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} m_{ii}$. Montrer que :

$$|\lambda - \delta| \leq 1 - \delta$$

Justifier que si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

On suppose désormais que tous les coefficients m_{ij} de la matrice stochastique M sont strictement positifs.

7. Démontrer que $\dim(\text{Ker}(M - I_n)) = 1$.

Si $(u_1, \dots, u_n)$ désigne les composantes réelles d'un vecteur du noyau, on pensera à introduire $\min u_i$.

II Convergence des itérées

On pose $\epsilon = \min_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}$ et on s'intéresse à la suite des puissances de M . On note alors $m_{ij}^{(k)}$ le coefficient de la matrice M^k situé en position (i, j) .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^{(k)} \\ \beta_j^{(k)} = \max_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^{(k)} \end{cases}$$

Dans les quatre questions suivantes, on fixe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

8. Démontrer les inégalités $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$.

9. Démontrer qu'il existe un couple $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que :

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0 j_0} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$

10. Démontrer qu'il existe un couple $(i_1, j_1) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que :

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1 j_1} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$

11. En déduire que $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\epsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.

12. Démontrer alors que M^k converge vers une matrice stochastique $B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ dont toutes les lignes sont égales.

On note P^∞ la ligne $(b_1, \dots, b_n)$.

13. Démontrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i > 0$.

14. Etablir que la suite $(P^k) = (P^{(0)} M^k)$ converge vers P^∞ , et ceci quelque que soit la distribution initiale $P^{(0)}$.