

Planche de préparation pour les écrits

L'examineur vous proposera les extraits de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un ou deux extraits de cette planche [45 min]
 2. Puis, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examineur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses !**
- (*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (spectre d'une matrice tridiagonale).

extrait du concours CCINP 2019 - PSI []

On cherche à déterminer les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière, et on rappelle que le **théorème spectral** nous livre le résultat suivant :

toute matrice symétrique réelle $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable en base orthonormée et ainsi il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = P.D.P^T$$

avec D une matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels. En particulier, les valeurs propres de S sont toutes réelles.

I - Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\} \text{ tel que } Ax = \lambda x.$$

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$.
2. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$. En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

3. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. Montrer que $|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|$.

II - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

5. En utilisant la question 4, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X) = \det(2XI_n - A_n(0,1))$.

6. Soit $n \geq 3$, on note $D_n = \chi_{A_n(0,1)}$. Montrer que $D_n = XD_{n-1} - D_{n-2}$. En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n , U_{n-1} et U_{n-2} .
7. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

8. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\{2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}), j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

9. Considérons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j) x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket. \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j) x_n = 0 \end{cases}$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) u_k + u_{k+1} = 0.$$

10. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.
11. Déterminer l'ensemble F des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.
12. En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$.
13. Retrouver alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Exercice 2 (inégalité de Hadamard).

extrait du concours CCINP 2025 - MPI []

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On se donne des réels strictement positifs notés $x_1, \dots, x_n$ et on pose :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

On désigne par $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre n , c'est à dire les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0 \quad (*)$$

De la même façon, on note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n , c'est à dire les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0 \quad (**)$$

1. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $Sp(M)$ le spectre de M . Montrer que $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $Sp(M)$ le spectre de M . Montrer que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$. Démontrer alors l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right).$$

4. En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

5. Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
6. Dans cette question B désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que B est diagonalisable, puis démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(B),$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si, $B \in \text{Vect}(I_n)$.

Désormais $A = (a_{i,j})$ désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

7. En utilisant $(**)$ avec un vecteur X bien choisi, démontrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a : $a_{i,i} > 0$.
8. On pose D la matrice diagonale définie par $D = \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et $B = DAD$. Démontrer que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en déduire que :

$$\det(A) \leq a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n}$$

avec égalité si, et seulement si, A est diagonale.

Exercice 3 (groupe linéaire et exponentielle de matrices).

extrait du concours CCINP 2020 - MP []

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note encore $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? On pourra se ramener à la caractérisation séquentielle et construire une suite de matrices inversibles qui ne tend pas vers une matrice inversible.
2. Justifier que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Justifier que la densité précédente ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Application

- (a) Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
 - (b) A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.
6. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

7. Montrer que $\|\cdot\| : A \mapsto \|A\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
8. Etablir que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$
9. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série vectorielle $\sum A^k/k!$ est convergente. On note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k/k!$.
10. (a) Soient A, B deux matrices telles que $AB = BA$. Etablir que :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$
- (b) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4 (décomposition de Dunford).

extrait du concours CCINP 2021 - MP []

On admet ici le **théorème de Dunford** que l'on pourra utiliser librement :Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

- (1) $A = D + N$;
- (2) D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
- (3) N est nilpotente ;
- (4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A .**Partie I - Quelques exemples**

1. (a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
- (b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

(c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A , puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A .

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A . On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

4. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Démontrer qu'on a la somme directe :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u - id) \oplus \ker(u - 2id)^2$$

5. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\ker(u - id) = \text{vect}(e_1), \quad \ker(u - 2id) = \text{vect}\{e_2\} \quad \text{et} \quad \ker(u - 2id)^2 = \text{vect}\{e_2, e_3\}.$$

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A .

7. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

8. On pose les endomorphismes :

$$p = V(u) \circ (u - 2id)^2 \text{ et } q = U(u) \circ (u - id)$$

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - id)$ parallèlement à $\ker(u - 2id)^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2id)^2$ parallèlement à $\ker(u - id)$.

9. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ obtenue à la question 5. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Exercice 5 (étude de la fonction Trigamma).

extrait du concours E3A 2016 - PSI []

On rappelle que la fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

En particulier, $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens,

$$H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$$

et on rappelle que $t^x = e^{x \ln(t)}$.

- Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t) dt$ existe et donner sa valeur.
- Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.
- Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur $[0, 1]$.
- Établir que H est de classe C^1 sur D_H , puis montrer que H est monotone sur D_H .
- Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(x_n)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.
- Démontrer que :

$$\forall x > -1, H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

7. Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Soit $x > -1$.

- Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
- Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

10. En déduire que $H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

11. Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Exercice 6 (étude de la fonction Trigamma).

extrait du concours CCINP 2023 - MP []

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et sur $[1, +\infty[$.

2. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

3. 1^{ère} tentative

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, 1[$?

4. 2^{ème} tentative

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}$. A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

5. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

6. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt$$

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$, c'est à dire que l'intégrale est bien convergente à x fixé dans $]0, +\infty[$.

8. Démontrer que f_α est bien définie sur $[0, +\infty[$.

9. Etablir que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$. On pourra se ramener à la caractérisation séquentielle de la limite et considérer (x_n) telle que $x_n \rightarrow +\infty$

11. Démontrer que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$