Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [30 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [25 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (endomorphisme cyclique). **extrait du concours Centrale 2019 - MP** [ ]

On rappelle que $f \in \mathcal{L}(E)$ est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que M et M^T ont même spectre, c'est à dire que leurs polynômes caractéristiques ont les mêmes racines.
   (b) Montrer que M^T est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.
2. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice
$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
   Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
3. Soit λ une valeur propre de C_Q^T. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. Montrer alors que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
5. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Exercice 2 (exponentielle de matrices diagonalisables). **extrait du concours Centrale 2013 - PSI** [ ]

Si $A \in M_p(\mathbb{R})$ on définit, lorsque cette limite existe,
$$E(A) = \lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

1. Soit $D \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.
   (a) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.
   (c) Soit $(\Delta, +)$ le sous-groupe additif de $M_p(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales. Montrer que E définit un morphisme de groupes de $(\Delta, +)$ dans $(GL_p(\mathbb{R}), \times)$.
2. Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.
   (a) Montrer que $E(A)$ existe, puis justifier que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
3. Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. *On étudiera les restrictions de u_B aux sous-espaces propres de u_A afin de justifier soigneusement la co-diagonalisation*
   (b) En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

Exercice 3 (réduction d'une matrice tridiagonale). **extrait du concours Centrale 2018 - PSI** [ ]

Une matrice tridiagonale est une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a,b,c) sont des complexes.

On fixe (a,b,c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a,b,c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a,b,c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.
2. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation
$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \quad (*)$$
3. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que l'équation $(*)$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.
4. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.
5. En utilisant l'équation $(*)$ satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :
$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$
6. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$,
$$x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$
7. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 4 (calcul d'une intégrale). **extrait du concours Mines-Ponts 2016 - MP** [ ]

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$$

1. Démontrer que $\psi : u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur I.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.
4. En déduire que pour tout $x \in I$,
$$xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$$
5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$.
Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\text{t}.$
6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

Exercice 5 (la transformée de Fourier). **extrait du concours Centrale 2016 - PSI** [ ]

On note :

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par :

$$\forall \xi, \ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} \, dt$$

1. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

2. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

   (a) Justifier que ψ est développable en série entière.

   (b) Prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_n^{n+1} |\psi(x)| \, dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

   En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

3. Soit $f \in E_{cpm}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. *On pourra revenir à la caractérisations équentielle et montrer que si* $x_n \longrightarrow a$*, alors* $\mathcal{F}(f)(x_n) \longrightarrow \mathcal{F}(f)(a)$.

4. Soit $f \in \mathcal{S}$.

   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi\xi} \, dt$$

   Pour les 3/2, il faudra admettre qu'on peut dériver sous le signe intégral... on traitera ces résultats en janvier.

5. On considère la fonction $\theta \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$.

   (b) Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \, dx = 1$.

Exercice 6 (équivalent d'une série entière en un point du bord). **extrait du concours Mines-Ponts 2016 - PC** [ ]

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument.

Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{\pi}$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer la limite :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$, et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

   On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi}$.

4. Montrer que pour toute application polynomiale réelle Q, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$$

On considère la fonction h définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ x \in [0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{x} \text{ si } \ x \in [e^{-1}, 1] \end{cases}$$

5. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt$$

   et donner sa valeur.

6. Soit $x \in [0,1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

7. On admet ici l'**égalité dite de Karamata** :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$$

   En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$