Planche de préparation pour les écrits

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [30 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [25 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (réduction et existence d'une racine carrée). **extrait du concours CCINP 2020 - MP** [ ]

Dans cet exercice, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on introduit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer le produit $(A - I_3)(A - 4I_3)$. Que pouvez-vous alors dire de l'endomorphisme $(f - id) \circ (f - 4id)$?
3. En déduire qu'on a la décomposition $\mathbb{R}^3 = Ker(f - id) \oplus Ker(f - 4id)$.
4. Justifier que la matrice A est diagonalisable, puis donner une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
5. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer alors une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$. Cette matrice B est-elle unique ?

Exercice 2 (polynômes de Laguerre). **extrait du concours CCINP 2019 - PC** [ ]

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire. *On s'appliquera d'abord à justifier que l'intégrale est bien convergente.*
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :
$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$
3. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $(X^k|1) = k!$

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

4. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\alpha(X^k)$, puis retrouver la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
6. Calculer le polynôme caractéristique χ_α de α, et préciser les valeurs propres de α.
7. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \oplus_{k=0}^{n} Ker(\alpha + kid_{\mathbb{R}_n[X]})$.

Exercice 3 (développement ternaire). **extrait du concours CCINP 2020 - MP** [ ]

On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On désigne par l^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose pour cet exercice :

$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$$

On note enfin $E(X)$ la partie entière d'un réel X vérifiant $E(X) \leq X < E(X)+1$.

1. Démontrer que l^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \longmapsto \|u\|$ est bien définie, et qu'elle constitue une norme sur l^∞.
2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note :
$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$
3. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.
4. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :
$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} - \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad ; \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} - \{1\},\ \tau'_n = 2.$$
Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n(x) = E(3^n x) - 3E(3^{n-1}x).$$

5. Démontrer que $t(x) \in T$.
6. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{E(3^n x)}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$
Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$
Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & [0,1] \\ u & \longmapsto & \sigma(u) \end{array}\right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée **développement ternaire propre** de x.

Exercice 4 (approximation de $\ln(2)$). **extrait du concours E3A 2016 - PC** [ ]

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.
   (b) En tuilisant la formule de Stirling, montrer que la série de terme général a_n est convergente.
2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\mathrm{d}x$. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On note sous réserve d'existence $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que l'intégrale J est bien définie, et montrer que $I = J$.
   (b) En calculant $I + J$, retrouver la valeur de I.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers la fonction $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}[\longmapsto -2\ln(\cos(x))$. *On rappellera soigneusement le développement en série entière utilisé.*
   (b) En faisant appel au **théorème de convergence dominée**, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\mathrm{d}x$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 5 (intégrales de Fresnel). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{it^2}\,dt$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$.

1. Démontrer que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.
2. Étudier la parité de la fonction H.
3. Justifier que la fonction $t \longmapsto e^{it^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. En admettant qu'on peut intégrer un tel développement sur le segment $[0,x] \subset \mathbb{R}$, en déduire que :
$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$
4. Si $x > 0$, démontrer que :
$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du.$$
5. Pour $x > 4\pi^2$, en déduire que :
$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}du.$$
6. Justifier alors que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ converge.

Exercice 6 (généralités sur la fonction *zeta*). **extrait du concours CCINP 2021 - MP** [ ]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

1. Etablir que ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.
2. On rappelle que la norme $\|.\|_\infty$ est définie sur $]1,+\infty[$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in]1,+\infty[} |f(x)|$, et on fixe $a > 1$.
   (a) La série $\sum \|f_n\|_\infty$ est-elle convergente sur $]1,+\infty[$?
   (b) On restreint alors l'intervalle de travail à l'intervalle $[a,+\infty[$ et on considère donc la norme infinie sur cet intervalle. Montrer que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.
   (c) <u>On admet</u> que la question précédente nous permet d'échanger les symboles lim et $\sum$ à l'infini, c'est à dire qu'on admet que :
$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x}$$
   Déterminer la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Soit $x > 1$. On pose :
$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt.$$
   (a) En utilisant une comparaison série-intégrale, démontrer que :
$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$
   (b) En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.
4. **Un premier lien avec l'arithmétique**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on fixe $x > 1$.
   (a) Justifier en utilisant le théorème de Fubini que la famille $\{\frac{1}{(ab)^x},\ (a,b) \in A\}$ est sommable et que :
$$\sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^x} = \zeta(x)^2$$
   (b) En déduire que :
$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$
   On pourra considérer une autre partition de A*, par exemple* $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ *où* $A_n = \{(a,b) \in A,\ ab = n\}$ *et invoquer le théorème de sommation par paquets.*