Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [45 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [10 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (séries entières). **extrait du concours Mines-Ponts 2022 - PSI** [ ]

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et } \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$. On notera:
$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$
2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que:
$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$
4. Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.
   En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} L(z^n)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D:

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que:
$$P(z) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$
   et que pour tout réel $t > 0$:
$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.
7. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1} \, \mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.
8. Montrer que pour tout entier $n > 1$:
$$\int_1^n \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9. Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x\rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u} du$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, du$, ainsi que l'égalité:
$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

10. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que:
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-u}\right) \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 (marche aléatoire). **extrait du concours Mines-Ponts 2020 - MP** [ ]

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.
On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par
$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$
Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble
$$\{S_k,\ k \in \{0, \dots, n\}\}$$
de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas. On considère les fonctions F et G définies par les formules
$$\forall x \in]-1,1[\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)x^n$$
$$\forall x \in]-1,1[\,,\ G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n)x^n$$

1. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que
$$G(1) = \mathbb{P}(R \neq +\infty)$$

2. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$, montrer que
$$\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$
En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)$$

3. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$$
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R \neq +\infty)$.

4. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que
$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$$
L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que
$$\forall x \in]1-\alpha, 1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$$

5. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

6. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leq k \leq i-1\})$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(R > i)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i)$$

7. Conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n} = \mathbb{P}(R = +\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$

Exercice 3 (loi de Rademacher). **extrait du concours Centrale 2022 - PSI** [ ]

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1, 1\}$. On note enfin $\mathcal{N}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X+1)$.

2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY.

Jusqu'à la fin, n est un entier naturel non nul et $m_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$. La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est alors à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$.

On pose $\tau_n = tr\,(M_n)$ et $\delta_n = det\,(M_n)$.

4. Calculer l'espérance et la variance de la variable τ_n.

5. Calculer l'espérance de la variable δ_n.

6. Démontrer que la variance de la variable δ_n est égale à $n!$. On pourra développer δ_n selon une rangée et raisonner par récurrence.

Dans le cas particulier $n = 2$, m_{11}, m_{12}, m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

7. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{N}_2$.

8. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (intégrales à paramètre). **extrait du concours Centrale 2015 - MP** [ ]

1. ***La fonction*** Γ

(a) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) Soient x et α deux réels strictement positifs. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

2. ***La fonction β et son équation fonctionnelle***

   Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$

   (a) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x>0$ et $y>0$.

   (b) Montrer que pour tous réels $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y)=\beta(y,x)$.

   (c) Soient $x>0$ et $y>0$. Établir que $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$. En déduire que pour $x>0$ et $y>0$,

   $$\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\,\beta(x,y)$$

3. ***Relation entre la fonction β et la fonction Γ***

   On veut montrer que pour $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

   (a) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x>1$ et $y>1$.

Dans toute la suite de cette question, on supposera que $x>1$ et $y>1$.

   (b) Montrer que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u\,.$

   On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

   (c) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que:

   $$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)\,.$$

   (d) Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)a\big)\,\mathrm{d}u\,.$

   Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

   (f) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c\,;d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (g) Exprimer pour $a>0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

   (h) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

Exercice 5 (inégalités en probabilité). **extrait du concours Centrale 2022 - PSI** [ ]

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u=(u_i)_{i\in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que le nombre réel :

   $$C(u) = \sup\left\{|\langle u_i \mid u_j\rangle|\,,\ (i,j)\in I^2,\ i\neq j\right\}$$

   existe et appartient à l'intervalle $[0,1]$. $C(u)$ s'appelle **paramètre de cohérence** de la suite $(u_i)_{i\in I}$.

2. Montrer que si $C(u)=0$, alors l'ensemble $\{u_i,\ i\in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u)\leq\varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$. On dit alors que u est une famille "presque orthogonale".

3. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $ch(t) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Soient $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$ (définie dans la sous-partie II.B). On définit les vecteurs aléatoires, $X=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1,\dots,X_n)^T$ et $Y=\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1,\dots,Y_n)^T$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel t,

   $$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\rangle\big) = \left(ch\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

5. En déduire que, pour pour tout nombre réel t,

   $$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

6. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

7. En déduire que :

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

8. Avec les notations et les hypothèses de la question 4 , démontrer que :

$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $\left(X_j^i\right)_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ est une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi de Rademacher (**voir Exercice 3**)$\mathcal{R}$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \ldots, X_n^i)^T$.

8. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

9. On suppose que $n \geq 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1.$$

10. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

Exercice 6 (endomorphismes cycliques et commutant). **extrait du concours Centrale 2019 - MP** [ ]

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

Dans cette partie, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère f tel que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est **cyclique** : c'est à dire qu'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
Pour cela, on factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k\mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \ : \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

2. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

3. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?

4. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.
5. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

6. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.
7. Justifier que f est cyclique.

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) /\ f \circ g = g \circ f\}$.

8. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

9. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

10. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
11. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

Exercice 7 (séries entières). **extrait du concours Centrale 2024 - PSI** [ ]

L'objet de cette partie du problème est d'étudier le comportement de la somme f de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ de la variable réelle x aux bornes de son intervalle ouvert de convergence, c'est à dire que pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$$

VI.A - Rayon de convergence et première expression de la somme

1. En utilisant le critère de D'Alembert, justifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$, est de rayon de convergence égal à 1, c'est à dire justifier :

$$\forall\, |x| < 1, \text{ la série converge absolument et } \forall\, |x| > 1, \text{ la série diverge grossièrement}$$

puis préciser le comportement de la série pour $x = \pm 1$ afin d'obtenir le domaine de définition de la fonction f.

VI.B - Étude de f en 1

2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$ de la variable réelle x dont on note alors g sa somme.
4. À l'aide des deux séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

5. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1[, |f(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{M}{1-x}$.
6. En déduire que $f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} g(x)$.

VII.C - Étude de f en -1

On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné par :

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, c_n = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

7. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ de la variable réelle x, dont on note alors h sa somme, est égal à 1 , puis préciser le domaine de définition de h.
8. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ converge vers la constante $-\gamma$.
9. La fonction h est-elle continue en 1 ?
10. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

11. On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$. Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to -1 \\ x>-1}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
On pourra au préalable déterminer une relation entre f et h sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.