Planche de préparation pour les écrits

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [45 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [10 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (modélisation d'un jeu de société). **extrait du concours CCINP 2023 - PC** [ ]
On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.
Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.
Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée?
2. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1 .
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, **<u>on suppose que $M = 2$</u>**.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

4. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

5. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que:
$$P(T = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$$

6. Calculer $P(T = 0)$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

7. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ et montrer que:
$$\forall x \in] - R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

8. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Exercice 2 (matrices stochastiques). **extrait du concours CCINP 2017 - MP** [ ]

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps $n + 1$ qui dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n + 1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n + 1$ elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer en justifiant la loi de X_1.

2. On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n. Justifier la relation matricielle suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1, p]\!]$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en commençant par étudier le spectre de A. C'est l'objet des parties suivantes.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

4. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$.

5. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a $|\lambda| \leq 1$.

Localisation des valeurs propres
Soit λ une valeur propre de A.

6. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

7. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :
$$|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}.$$

Étude d'un exemple

8. Dans cette question uniquement, on prend :
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

Cas des matrices stochastiques strictement positives

9. On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice A est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note B' la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de B.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B'.
On admet qu'il existe un entier de $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que :
$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$
La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similaire à celle de la question **7**.
Déduire de cette inégalité que B' est inversible.

10. En déduire que $\dim Ker(A - I_p) = 1$.

Exercice 3 (marche aléatoire). **extrait du concours CCINP 2020 - PC** [ ]

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.
A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$
On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?

2. Calculer p_0, p_1 et p_2.

3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :
$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. On note également R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

8. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

9. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

10. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11. En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

12. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Exercice 4 (un calcul de zeta(2)). **extrait du concours CCINP 2024 - MP** [ ]

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

1. **Question préliminaire** Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

2. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \,\mathrm{d}x$.

   Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

   En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$.

4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

5. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x$.

6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5 (séries entières). **extrait du concours CCINP 2019 - PC** [ ]

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

6. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \qquad (E_1)$$

8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Exercice 6 (matrices par blocs). **extrait du concours CCINP 2019 - PSI** [ ]

On considère A, B, C, D des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

1. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC) \tag{1}$$

2. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.
3. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $D + \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.
4. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C} ; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.
6. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

   Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.
7. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

Exercice 7 (projecteurs spectraux). **extrait du concours CCINP 2023 - MP** [ ]

1. **Un exemple**

   Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

   Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

2. On rappelle le **lemme de décomposition des noyaux** :
   si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :
   $$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u)).$$
   L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

   Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
   Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

   Démontrer que : $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

   Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
   On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
   Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

   Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \ldots + R_m Q_m = 1$.

4. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
   Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a les trois résultats suivants :
$$p_i \circ p_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$
   et chaque p_i est un projecteur de E.
   Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

5. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :
$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$
   (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
   Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.

6. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\ p_1 \oplus \mathrm{Im}\ p_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\ p_m$.

7. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Im}\ p_i$.