Planche de préparation pour les écrits

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [40 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [15 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (la constante d'Euler). **extrait du concours Centrale 2024 - PSI** [ ]

Dans tout ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Le but de ce problème est dans un premier temps de s'assurer de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis d'essayer de déterminer différentes expressions de sa limite, à l'aide d'intégrales.

1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1} - a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ pour toute la suite du problème, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Sous réserve que cela ait du sens, on appelle fonction Γ la fonction donnée par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

On désignera par u la fonction de deux variables définie par : $u : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathrm{R} \\ (x,t) & \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

3. Montrer que Γ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Etablir que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de sa dérivée sous forme intégrale.
5. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. On admet la **formule de Weierstrass**, formule que vous avez évidemment déjà vue avec votre prof car celui-ci est exceptionnel :

$$(W): \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma \mathrm{x}} \prod_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}}\left(1 + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)\right)$$

   À l'aide de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$, montrer que :

$$\forall x > 0, \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

7. En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$, et calculer alors $\Gamma'(2)$.
8. À l'aide d'un changement de variables, montrer que l'on a $\gamma = -\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt$.

Exercice 2 (la transformée de Fourier). **extrait du concours Centrale 2021 - MP** [ ]

On note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$ et on admet que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle **transformée de Fourier** de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $f \longmapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout x. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle **produit de convolution** de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = (g * f)(x)$$
5. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0, k]\!]$, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f * g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)$.
7. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. En admettant que, pour tout ξ réel,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$
existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 3 (racine carrée d'une matrice). **extrait du concours Centrale 2024 - PC** [ ]

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^\mathrm{T} M X \geqslant 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.
Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle **racine carrée** de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

1. On rappelle que $M \in \mathrm{O}(2)$ si M est inversible et $M^{-1} = M^T$. Redémontrer que :
$$M \in \mathrm{O}(2) \Leftrightarrow M \in \{R(\theta), S(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$$
avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathrm{O}(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?
3. Soit $A \in S_q(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$A \in S_q^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(A),\ \lambda \geq 0$$
4. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
5. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note alors de façon abusive $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On rappelle que, d'après le **théorème spectral**, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que $M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^{\mathrm{T}}$. On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geqslant 0$, la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right). \end{cases}$$

est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right) \end{cases}$$

6. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}, M_n$ est bien définie et que :

$$M_n = P \operatorname{diag}\left(c_n\left(\lambda_1\right), \ldots, c_n\left(\lambda_q\right)\right) P^{\mathrm{T}}$$

7. En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

Exercice 4 (fonction de Wallis). **extrait du concours Mines-Ponts 2023 - MP** [ ]

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions d'une variable réelle définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier la fonction f.

1. Montrer que σ est définie sur $[-1,1]$. *On pourra utiliser la règle de D'Alembert, sans oublier d'étudier spécifiquement les bords de l'intervalle.*

2. Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(kt) \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$$

   puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

3. Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, établir le **lemme de Riemann-Lebesgue** :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt) \mathrm{d}t = 0$$

4. En utilisant la question **2**, retrouver la valeur de $\zeta(2)$, c'est à dire que $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Vérifier que f est définie si et seulement si $x > -1$, puis vérifier que pour tout $x \in I$:

$$(x+1) f(x) = (x+2) f(x+2) \tag{1}$$

6. Montrer que f est de classe C^2 sur I et que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))(\sin(t))^x \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t))(\sin(t))^x \, \mathrm{d}t$$

   Justifier alors que f est décroissante et convexe sur I.

7. En utilisant la question **5**, donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

8. Montrer que pour tout entier naturel n, on a toujours :

$$f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

   puis établir que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

9. Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Exercice 5 (représentation matricielle de $A\exp(A)$). **extrait du concours Mines-Ponts 2014 - MP** [ ]

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Enfin, on appelle **bloc de Jordan d'ordre** n associé au nombre complexe λ, la matrice :

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à cœfficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $\omega = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = \omega$ équivalente au système:
$$\begin{cases} Re^{R\cos\theta} = r \\ R\sin\theta = \alpha - \theta \end{cases} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule:

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin\theta} e^{\left((\alpha-\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

2. Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé. Soit $D = \{Re^{i\theta}; R > 0; 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.
3. Déduire de ce qui précède que g est surjective.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, ..., N^{n-1}X)$ est libre.
5. En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.
6. Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.
7. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\overline{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \overline{N}e^{\overline{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8. Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et montrer que l'on peut écrire:
$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$
où p est un polynôme à cœfficients complexes qui dépend de μ.
9. Montrer que $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0)^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

Exercice 6 (autour des exponentielles de matrices). **extrait du concours Mines-Ponts 2022 - MP** [ ]

Dans tout le sujet, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant les propriétés :

$$\|I_n\| = 1. \qquad (N_1)$$
$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\mathbf{e}^A$, ou bien $\exp(A)$, définie par :

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application :

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'_A(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans les questions 1 et 2 que A et B commutent.

1. Montrer que les matrices A et $\mathbf{e}^B$ commutent.

2. On définit une application :
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$
Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} \qquad (1)$$

3. Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, prouver la relation $\left\|\mathbf{e}^A\right\| \leq e^{\|A\|}$.

5. Montrer que $det\left(\mathbf{e}^A\right) = e^{tr(A)}$.

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'objectif est de prouver la relation :
$$\lim_{k\to+\infty}\left(\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A}\mathbf{e}^{\frac{1}{k}B}\right)^k = \mathbf{e}^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B) \qquad (2)$$

Pour k entier naturel non nul, on pose :
$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right).$$

6. Prouver les majorations :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

7. On introduit la fonction :
$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)} \end{array}$$
Montrer que :
$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

8. Vérifier la relation :
$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i\left(X_k - Y_k\right)Y_k^{k-i-1}$$
En déduire la relation (2).