Planche de préparation pour les écrits

L'examinateur vous proposera un exercice de son choix. Tous sont extraits de sujets de concours : on s'appliquera à mettre en avant ses idées, les résultats du cours cachés derrière chaque question et à rédiger avec rigueur.

L'interrogation se fera donc en deux temps :

1. Présentation d'un exercice de la planche [30 min]
2. Recherche d'un exercice en temps limité [25 min]
   Pour finir, vous résoudrez un exercice proposé (*) par l'examinateur : on s'appliquera à échanger avec lui, à mettre en avant ses idées, les résultats du cours et à rédiger avec rigueur... **attention, votre tableau reflète beaucoup de choses** !

(*) parmi les thèmes abordés depuis le début de l'année.

Exercice 1 (la base des polynômes d'Hermite). **extrait du concours CCINP 2016 - MP** [ ]
Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\,dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

3. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$. En déduire que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$.
5. Etablir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. **Étude des racines des polynômes** H_n
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, $a_1, a_2, \dots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par :
   $$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad\text{et}\quad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \text{ sinon.}$$
   (a) Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est nécessairement scindé à racines simples, c'est à dire qu'il a n racines réelles distinctes.

Exercice 2 (diagonalisation et puissances d'une matrice particulière). **extrait du concours CCINP 2023 - PSI** [ ]
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & b & a \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a, b)$.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a, b) = bI_n + aM(1, 0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $M(a, b)$ est diagonalisable.
2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.

3. Montrer que $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.

4. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.

5. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$.
Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a=0$ et $a \neq 0$).

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n.

7. Supposons que $|b-a|<1$ et $|b+(n-1)a|<1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (matrices semblables). **extrait du concours CCINP 2019 - MP** [ ]

On s'intéresse dans ce problème, à tracers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

1. Justifier que deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

2. On donne deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? *On pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable et pas l'autre.*
Ont-elles le même polynôme minimal ?

3. On donne deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

• **première méthode** : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E.

• **deuxième méthode** : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4. Démontrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice:
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & . & . & \vdots & a_2 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

5. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

6. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

7. On donne une matrice : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A. *Dans cette question, il est vivement déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.*

Exercice 4 (étude de la fonction Trigamma). **extrait du concours E3A 2016 - PSI** [ ]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$ et on rappelle que $t^x = e^{x\ln(t)}$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, dt$ existe et donner sa valeur.
2. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^\alpha(\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur $[0,1]$.
4. Etablir que H est de classe C^1 sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H sur D_H.
5. Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H(x_n)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} H(x)$.
6. Démontrer que :
$$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$
7. Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Soit $x > -1$.

8. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
9. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$
10. En déduire que $H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+k)^2}$, puis calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Exercice 5 (une utilisation de la fonction Gamma). **extrait du concours E3A 2021 - MP** [ ]

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$. Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. *On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.*
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a :
$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Exercice 6 (fonction Gamma et formule des compléments). **extrait du concours CCINP 2023 - MP** [ ]

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Démontrer que $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

2. Démontrer que $J(\alpha)=I(1-\alpha)$.

3. Pour tout $x\in]0,1[$, on pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}$. A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :
$$I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$$
En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

4. Justifier alors que :
$$I(\alpha)+J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(\alpha x)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right)$$

5. Démontrer que :
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Dans toute la suite on pose $\forall x\in[0,+\infty[,\quad f_\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,e^{-xt}\mathrm{d}t$.

6. Démontrer que f_α est bien définie sur $[0,+\infty[$, puis établir qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée $f'_\alpha(x)$ sous forme intégrale.

7. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)$.

8. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, démontrer que $f_\alpha(x)-f'_\alpha(x)=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$, puis montrer que :
$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f_\alpha(x)=\Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

9. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t=\Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, puis retrouver l'identité suivante appelée aussi **formule des compléments** :
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$