Exercices préliminaires extraits du concours X/ENS

Exercice 1 (sous-groupes finis de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$). **extrait du concours X/ENS 2021 - MP** [ ]

Pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles dont l'inverse est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (on ne demande pas de démontrer que cet ensemble est bien un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$). Si G est un groupe d'élément neutre e, on rappelle qu'un élément g de G est dit d'ordre fini s'il existe un entier $d > 0$ tel que $g^d = e$. Dans ce cas, l'ordre de g est le plus petit entier $d > 0$ tel que $g^d = e$ Si $z \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, on dit que z est une racine d-ième de l'unité si $z^d = 1$. S'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $z \in \mathbb{C}$ soit une racine d -ième de l'unité, on dira simplement que z est une racine de l'unité.

1 Préliminaires

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de l'unité. Justifier que $|z| = 1$.
2. Soit $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, et soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que g est d'ordre d. Démontrer que g est diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres sont ses racines d-ième de l'unité.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, et soit $q \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que card$(\{1 \leq k \leq m$ tels que $q|k\} = \lfloor \frac{m}{q} \rfloor$.
   (b) En déduire que si q est premier,
$$\nu_q(m!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lfloor \frac{m}{q^i} \rfloor$$

2 Éléments d'ordre fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des ordres possibles pour les éléments d'ordre fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ est fini.

On commence par détailler le cas $n = 2$. Soit $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que g est d'ordre fini $d \in \mathbb{N}^*$.

4. Démontrer que $|\operatorname{Tr}(g)| \leq 2$.
5. On suppose que les valeurs propres de g sont réelles, déterminer les valeurs possibles pour d.
6. On suppose maintenant que g n'a pas de valeurs propres réelles. Démontrer que le polynôme caractéristique de g est l'un des polynômes suivants :
$$X^2 + 1, \ X^2 + X + 1, \ X^2 - X + 1$$
7. En déduire que $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

On traite maintenant le cas de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ où $n \geq 1$ est un entier quelconque.

8. Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P (comptées avec multiplicité) et $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$.
   Démontrer que pour tout $0 \leq i \leq n-1, |a_i| \leq \binom{n}{i} \alpha^{n-i}$
9. Montrer que $\{\chi_g$ tels que $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini$\}$ est fini.
10. En déduire que $\{d \in \mathbb{N} \mid \exists g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre $d\}$ est fini.

3 Sous-groupes finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette partie est de majorer le cardinal des sous-groupes finis de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ par une quantité ne dépendant que de n.

11. Soit $m \geq 3$ un entier. Soit $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que g est d'ordre fini et que $g - I_n$ a tous ses coefficients divisibles par m. Soit $A = (g - I_n)/m$.
    (a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| < 1$.
    (b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
    (c) Conclure que $g = I_n$
12. Soit G est un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$, et soit $m \geq 3$ un entier.
    (a) Démontrer que l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ de réduction modulo m des coefficients induit une application injective $G \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
    (b) En déduire que card $(G) \leq 3^{n^2}$.

Exercice 2 (autour du théorème d'Abel). **extrait du concours X/ENS 2024 - MP** [ ]

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Abel, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certains variantes puis des réciproques partielles.

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et de somme f. On note :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \ z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

pour $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

Le but de cette question est de démontrer que :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right). \qquad \text{(Théorème d'Abel)}$$

(a) Démontrer le résultat précédent pour $R > 1$.

À partir de maintenant, on suppose que $R = 1$ et que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, et on se donne un $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

(b) Démontrer que pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1 \right).$$

(c) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on a :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

(e) Démontrer qu'il existe $\rho(\theta_0) > 0$ tel que pour tout $z \in \Delta_{\theta_0}$ de la forme $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $0 < \rho \leqslant \rho(\theta_0)$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}.$$

En déduire le théorème d'Abel.

2. Démontrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Exhiber une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme f, telle que $f(z)$ converge quand $z \to 1$, $|z| < 1$ et telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ ne converge pas.

4. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que :

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \right). \qquad \text{(Taubérien faible)}$$

Dans la suite de cette question on suppose que $\lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$ on a :

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x) \sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}.$$

(b) En déduire le théorème Taubérien faible en spécifiant $x = x_n = 1 - 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (exponentielle de matrices et crochet de Lie). **extrait du concours X/ENS 2014 - MP** [ ]

Soit d un entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d et I_d désigne la matrice identité. Le produit de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est noté $A \times B$ ou simplement AB. On appelle commutateur de A et B la matrice

$$[A, B] = AB - BA$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est définie par

$$\exp(A) = I_d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

On munit $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

On note $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui sont inversibles, et $\mathrm{SL}_d(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant 1 .

La première et la troisième parties sont consacrées à l'étude de matrices carrées de taille $d = 3$. La deuxième partie est largement indépendante des autres parties.

Première partie

On considère l'ensemble des matrices carrées de taille 3 triangulaires supérieures strictes :

$$\mathbf{L} = \left\{ M_{p,q,r} \mid (p, q, r) \in \mathbf{R}^3 \right\} \quad \text{où} \quad M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathbf{H} = \{I_3 + M \mid M \in \mathbf{L}\}$.

1. Calculer l'exponentielle de la matrice $M_{p,q,r}$.
2. (a) Montrer que l'on définit une loi de groupe $*$ sur $\mathbf{L}$ en posant pour $M, N \in \mathbf{L}$:

$$M * N = M + N + \frac{1}{2}[M, N]$$

   On explicitera l'inverse de $M_{p,q,r}$.

   (b) Déterminer les matrices $M_{p,q,r} \in \mathbf{L}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbf{L}$ pour la loi $*$. $(\mathbf{L}, *)$ est-il commutatif ?
3. Montrer que pour toutes matrices $M, N \in \mathbf{L}$, on a :

$$(\exp M) \times (\exp N) = \exp(M * N)$$

4. Soient M et N deux éléments de $\mathbf{L}$. Montrer que :

$$\exp([M, N]) = \exp(M) \exp(N) \exp(-M) \exp(-N)$$

5. Montrer que $\mathbf{H}$ muni du produit usuel des matrices est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ et que :

$$\exp : (\mathbf{L}, *) \to (\mathbf{H}, \times)$$

   est un isomorphisme de groupes.

Deuxième partie

On considère dans cette partie deux matrices A et B de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

Dans les questions **6** et **7**, on suppose de plus que A et B commutent avec $[A, B]$.

6. (a) Montrer que $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A, B]$.

   (b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \exp(tA) \exp(tB)$.

   (c) En déduire la formule :

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right)$$

7. On note $\mathcal{L} = \text{Vect}(A, B, [A, B])$.
   (a) Si $M, N \in \mathcal{L}$, montrer que $[M, N]$ commute avec M et N.
   (b) Soit $G = \{\exp(M) \mid M \in \mathcal{L}\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe et que l'application
   $$\Phi : \mathbf{H} \to G, \quad \exp\left(M_{p,q,r}\right) \mapsto \exp(pA + qB + r[A, B])$$
   est un morphisme de groupes.

Dans toute la suite de cette partie, A et B sont à nouveau deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

8. Soit $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ qui converge vers $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Elle est donc bornée : soit $\lambda > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbf{N}, \|D_n\| \leq \lambda$.
   (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Justifier que $\frac{n!}{(n-k)!n^k} \to 1$ quand $n \to +\infty$ et que si $n \geq k$ (et $n \geq 1$),
   $$0 \leq 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1$$
   En déduire que :
   $$\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(D_n\right)^k \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$
   (b) Montrer que pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 0$,
   $$\left\|(D_n)^k - D^k\right\| \leq k\lambda^{k-1} \left\|D_n - D\right\|.$$
   (c) Conclure que $\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n \to \exp(D)$ quand $n \to +\infty$.

9. (a) Soit $D \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ telle que $\|D\| \leq 1$. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ indépendante de D telle que
   $$\|\exp(D) - I_d - D\| \leq \mu\|D\|^2$$
   (b) Montrer qu'il existe une constante $\nu > 0$, et pour tout $n \geq 1$ une matrice $C_n \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, tels que :
   $$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n \quad \text{et} \quad \|C_n\| \leq \frac{\nu}{n^2}$$

10. Déduire de ce qui précède que :
   $$\exp(A + B) = \lim_{n\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n$$

Exercice 4 (déviation d'une somme de variables aléatoires discrètes). **extrait du concours X/ENS 2020 - MP** [ ]
Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors

$$\mathbb{E}[Y_1 \cdots Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdots \mathbb{E}[Y_n]$$

On note log la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose $\log(0) = -\infty$.

Première partie

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \log\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right)$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'épérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq \exp(-\lambda t)\mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$$
2. Montrer que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) \leq \inf_{\lambda \geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$$

Pour chaque $\lambda \geq 0$, on pose :

$$m(\lambda) = \frac{\mathbb{E}[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{\mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)]}$$

ainsi que :

$$D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n\psi(\lambda))$$

4. Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $t \in [0, 1[$, il existe un unique $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.
5. (a) Pour $n \geq 2$ et $\lambda \geq 0$, montrer que :
$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0$$
   (b) En déduire que, pour $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$,
$$\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}$$

Pour tous $n \geq 1$, $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Montrer que :
$$\mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \geq \mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon)\exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon))]$$
7. Montrer que :
$$\mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon)D_n(\lambda)] \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}$$
8. (a) En déduire, pour chaque $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite $(u_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et telle que
$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon]) \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon + u_n(\varepsilon)$$
   (b) Conclure que pour tout $t \in [0, 1[$,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) = \inf_{\lambda \geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$$

Exercice 5 (la loi zêta). **extrait du concours X/ENS 2021 - MP** [ ]

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a valeurs réelles.
On rappelle que si $s \in]1, +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa somme.
On dit qu'une variable aléatoire X a valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit la loi zeta de paramètre $s > 1$ si. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \zeta(s)^{-1} \frac{1}{n^s}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation de n en p. On note également $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $\chi_4(2n) = 0$ et $\chi_4(2n-1) = (-1)^{n-1}$. On pourra utiliser sans justification que, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\chi_4(mn) = \chi_4(m)\chi_4(n)$.

Soit $s > 1$ un nombre réel et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi zeta de paramètre s.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\{n \mid X\}$ l'évènement "n divise X" et $\{n \nmid X\}$ l'évènement complémentaire.

1. (a) Calculer $P(n \mid X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels. Montrer que les évènements
   $$\{p_1^{\alpha_1} \mid X\}, \{p_2^{\alpha_2} \mid X\}, \ldots, \{p_k^{\alpha_k} \mid X\}, \ldots$$
   sont mutuellement indépendants.
2. (a) Soit $r \geqslant 1$ un entier. Montrer que :
   $$P\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - p_i^{-s}\right).$$
   (b) En déduire que :
   $$\zeta(s)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - p_k^{-s}\right).$$
3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\nu_{p_k}(X) + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\left(1 - p_k^{-s}\right)$
   (b) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}^*, k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbb{N}^*$ et $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a
   $$P\left(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r\right) = \\ \sum_{\ell=0}^{r} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_r=\ell}} P\left(\nu_{p_{k_1}}(X) \geqslant n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geqslant n_2 + \varepsilon_2, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geqslant n_r + \varepsilon_r\right).$$
   (c) En déduire que les variables aléatoires $v_{p_1}(X), \ldots, \nu_{p_k}(X), \ldots$ sont mutuellement indépendantes .

   Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
   $$r_i(n) = \operatorname{Card}\{d \in \mathbb{N} : d \equiv i \;\; [4] \text{ et } d \mid n\}$$
   On pose $g(n) = r_1(n) - r_3(n)$.
4. (a) Montrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a $g(mn) = g(m)g(n)$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout nombre premier p on a :
   $$g\left(p^n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ n+1 & \text{si } p \equiv 1[4], \\ \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right) & \text{si } p \equiv 3[4]. \end{cases}$$
5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathbb{N}^* \to [0, +\infty[$ telle que $h(X)$ est d'espérance finie et telle que $|f_n(m)| \leqslant h(m)$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que $E(f(X))$ est d'espérance finie et montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} E\left(f_n(X)\right) = E(f(X))$$
6. (a) On note $r(n)$ le nombre de diviseurs $d \geqslant 1$ de n. Montrer que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} r(n)n^{-s}$ converge et que sa somme vaut $\zeta(s)^2$.
   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} g(n)n^{-s}$ converge.

7. (a) Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ converge simplement vers la fonction identité.

   (b) Montrer que $E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} E\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)$.

8. (a) Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 1\ [4]$, on a :

$$E\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

   (b) Calculer $E\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right)$ si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3\,[4]$.

   (c) En déduire :

$$E(g(X)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4\left(p_k\right) p_k^{-s}}$$

9. (a) Montrer que, si p est un nombre premier,

$$E\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}$$

   (b) Montrer que :

$$E\left(\chi_4(X)\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4\left(p_k\right) p_k^{-s}}$$

   (c) En déduire que la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

   est convergente et que sa somme vaut $E(g(X))$.

Exercice 6 (autour des sommes de Césaro). **extrait du concours X/ENS 2024 - MP** [ ]

Soit E une partie de $\mathbb{C}$. À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1., d'en proposer des applications et d'établir certains variantes puis des réciproques partielles.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right). \qquad \text{(Cesàro)}$$

   Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Applications.

2. En utilisant le lemme de Césaro, calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} e_n = \alpha$. En utilisant le lemme de Césaro, donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0,+\infty[$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.
5. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab.$$

6. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k\right) = AB. \qquad \text{(Cauchy)}$$

Réciproques partielles.

7. Vérifier que la réciproque de Césaro n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right).$$

   Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy faible)}$$

   Indication: on pourra démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$.
10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy fort)}$$

    On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

11. Soit $0 \leqslant n < m$. Démontrer que : $\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1}(m-j)e_j$.
12. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant n < m$ on a :
$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$
et
$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\left(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|\right).$$
13. En déduire la version forte du théorème de Hardy. *Indication: on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.*