Exercices préliminaires extraits du concours CCINP

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (une autre expression de l'espérance). **extrait du concours CCINP 2024 - MP** [ ]
X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

1. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
   Démontrer le résultat de cours : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel $k, P(X \leq k)$, puis donner la loi de X.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la question 1, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Exercice 2 (recherche de solutions DSE). **extrait du concours CCINP 2024 - MP** [ ]
On considère les équations différentielles :

$$(E)\ \ x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 1 \text{ et } (H)\ \ x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 0$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $x \in I, f(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.
3. On note pour $x \in I, g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x^2}$. On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.
   Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 3 (calcul de distance). **extrait du concours CCINP 2023 - MP** [ ]
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E, $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx$. On notera $\|\ \ \|$ la norme euclidienne associée.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.
3. Justifier que $\| X^2 - P_F(X^2) \|^2 = \| X^2 \|^2 - \| P_F(X^2) \|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\, dx.$$

Exercice 4 (loi d'une variable aléatoire). **extrait du concours CCINP 2023 - MP** [ ]
Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

1. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 5 (recherche d'extremum). **extrait du concours CCINP 2023 - MP** [ ]

On définit la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Etablir que l'équation $e^{-x}=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f possède un unique point critique $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.
3. A l'aide de la matrice hessienne, justifier que f admet un extremum local en (x_0,y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 6 (déterminant de Vandermonde). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

Pour n entier, $n\geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1,x_2\dots,x_n$ par:

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$.

1. Calculer $V(x_1,x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1,x_2\dots,x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1,x_2\dots,x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

2. On considère la fonction $t\mapsto P(t)=V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},t)$. Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.
   Démontrer par récurrence que $V(x_1,x_2\dots,x_n)=\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$.
3. **Première application.** Calculer le déterminant de la matrice $A=\left(i^j\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1,2,\dots,n)$.
4. **Deuxième application.** Donner un exemple de n nombres complexes $a_1,a_2,\dots,a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=0$. Soit n nombre complexes $x_1,x_2,\dots,x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k,\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2,\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3\quad\cdots\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^n$ est non nulle.

Exercice 7 (série exponentielle de matrice). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

Dans cet exercice, $\|\ .\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant pour tout couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A.B\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$.

1. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geq 0}\dfrac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
2. Démontrer que l'application $A\longmapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r>0$, déterminer la limite de $\dfrac{1}{\|H\|}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers 0.
4. En déduire que l'application $A\longmapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0. On précisera sa différentielle en 0.

Exercice 8 (interversion des symboles somme et intégrale). **extrait du concours CCINP 2021 - MP** [ ]

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t)=\frac{\ln t}{t^2-1}$$

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k=\int_0^1 t^{2k}\ln t\,dt$.
2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{\pi^2}{8}$$

   On pourra utiliser librement que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9 (utilisation de l'inégalité arihmético-géométrique). **extrait du concours CCINP 2021 - MP** [ ]

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que : $\forall(a,b,c)\in]0,+\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc}\leq \dfrac{a+b+c}{3}$.

2. On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par : $f(x,y)=x+y+\dfrac{1}{xy}$. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 10 (diagonalisation). **extrait du concours CCINP 2020 - MP** [ ]

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A=PDP^{-1}$

2. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2=A$

3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P

4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, a l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A.

Exercice 11 (autour du groupe linéaire). **extrait du concours CCINP 2020 - MP** [ ]

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists\rho>0,\quad \forall\lambda\in]0,\rho[,\quad M-\lambda I_n\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

   Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. **Application**. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   A l'aide des matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

5. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

Exercice 12 (intégration et fonction génératrice). **extrait du concours CCINP 2019 - MP** [ ]

Les questions sont ici indépendantes.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $f(t)=\dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

1. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$.

Par ailleurs, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $p_n=P(X=n)$, la fonction génératrice de X est définie par : $G_X(t)=E(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nt^n$.

2. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S=X_1+X_2$, démontrer que pour tout $t\in]-1,1[$, $G_S(t)=G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre en utilisant uniquement la définition : $G_X(t)=E(t^X)$.

   On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

4. **Application**. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t\in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.