Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (autour de l'exponentielle de matrices). **extrait du concours Mines-Ponts 2022 - MP** [ ]

Dans tout le sujet, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre vérifiant les propriétés :

$$\|I_n\| = 1. \qquad (N_1)$$
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\mathbf{e}^A$, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_A'(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\mathbf{e}^B = P^{-1}\mathbf{e}^A P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit leur crochet de Lie par

$$[A,B] = AB - BA.$$

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1. Montrer que les matrices A et $\mathbf{e}^B$ commutent.

On définit une application :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$

2. Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} \qquad (1)$$
3. Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.
4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, prouver la relation $\left\|\mathbf{e}^A\right\| \leq e^{\|A\|}$.
5. Montrer que $det\left(\mathbf{e}^A\right) = e^{tr(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'objectif est de prouver la relation :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A}\mathbf{e}^{\frac{1}{k}B}\right)^k = \mathbf{e}^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B) \qquad (2)$$

Pour k entier naturel non nul, on pose :

$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right).$$

6. Prouver les majorations
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)} \end{array}$$

7. Montrer que :

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

8. Vérifier la relation :

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i \left(X_k - Y_k\right) Y_k^{k-i-1}$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit groupe spécial linéaire:

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on introduit son algèbre de Lie :

$$\mathcal{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}.) \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{tM} \in G\right\}.$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, sont bien des sous groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9. Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

10. Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

11. En utilisant la partie 2 , montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}.B.\mathbf{e}^{-tA} \end{array}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13. En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, c'est à dire :

$$\forall A \in \mathcal{A}_G, \forall B \in \mathcal{A}_G, [A, B] \in \mathcal{A}_G.$$

Indications *Q2 On dérive g pour se ramener à l'équation* $g'(t) = A.g(t)$. *Q7 On rappelle d'abord un DL de* $\exp(tA)$ *en 0... puis, on cherche le DL de* $X_k - Y_k$*...Q9-Q10 On traduit l'appartenance à* $\mathcal{A}_G$ *et on cherche à caractériser l'expression obtenue. Q13 En fait,* $[A, B] = u'(0)$ *et ainsi, on justifie que le taux d'accroissement est dans* $\mathcal{A}_G$ *avant de passer à la limite.*

Distinguez-vous ! Les développement slimités peuvent aussi être manipulés avec des objets vectoriels... c'est le sens du chapitre sur les fonctions vectorielles, par contre on fera attention aux notations o et O. Il convient souvent de les manipuler en norme.

Exercice 2 (nombre de points fixes d'une permutation). **extrait du concours Mines-Ponts 2023 - PSI** [ ]

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ tel que: $\sigma(i) = i$.

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n \geqslant 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$. Par convention, on pose: $d_0 = 1$.

On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.

On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n}{n!} x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$ est notée s:

$$\forall x \in]-R, R[, \quad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

1. Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geqslant 1$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k} d_{n-k}$.

3. Montrer que:
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \frac{1}{1-x}.$$
En déduire que $R = 1$.

4. En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, exprimer $\frac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.

5. Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par:
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

6. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

   Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

   Montrer que, si $i \neq j$, la variable U_iU_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

7. Exprimer X_n à l'aide des U_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8. Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer:
$$y_k = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n(X_n = k).$$
Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant:
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = y_k.$$
Reconnaître la loi de Y.

9. On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que:
$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s).$$

Indications *Q4 On invoquera l'unicité des coefficients d'un DSE. Q5 Il suffit de revenir à un rapport de cardinaux..; on en déduit le calcul de la probabilité. Q6 C'est encore du dénombrement à condition ce que sont ces variables* U_i. *Q7 On a* $X_n = \sum U_i$ *et donc, on applique les propriétés de l'espérance et de la variance... attention, il faudra se rappeler la frmule d'Huygens pour la covariance. Q9 On essaie de montrer que la différence tend vers 0...*

Distinguez-vous ! Il y a ici un vrai travail sur les séries entières : on n'oubliera pas pour chacune d'elles ou pour les opérations à mener, à bien préciser le domaine de convergence.