Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (fonction de Bessel). **extrait du concours CCINP 2023 - PSI** [ ]

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x\sin(t)\big).$$
Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :
$$xy'' + y' + xy = 0. \qquad (\mathbf{E})$$
5. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:
$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$
6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Indications *Q4 On injecte dans l'équation, par contre il faudra utiliser Q3 pour modifier certains termes et simplifier les intégrales. Q5 On procède évdiemment par analyse-synthèse. Q6 On part du DSE de la fonction* cos*, mais attention à l'échange, car le DSE obtenu n'est pas en la variable d'intégration... il conviendra d'invoquer alors un autre théorème ! Q8 Merci l'unicité des coefficients des DSE...*

Distinguez-vous ! On a ici un exercice classique su rles intégrales à paramètre... ne bâclez pas la vérification des hypothèses indispensable sà ces théorèmes. Surtout à CCINP, on fait vite la différence puisque la mise en place de ces théorèmes est fortement récompensée !

Exercice 2 (loi forte des grands nombres). **extrait du concours CCINP 2018 - PSI** [ ]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif
Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, $(E(X) = 0)$, alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la **loi forte des grands nombres**.

1. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée.*

2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

3. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$, $P\big(|X| \geq \alpha\big) \leq \dfrac{E\big(|X|\big)}{\alpha}$.

4. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$P\big(S_n \geq \varepsilon\big) = P\big(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\big) \leq \frac{\big(E\big(e^{tX}\big)\big)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $E\big(e^{tX}\big)$

5. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$
Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

6. En déduire que :
$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

7. En déduire que $\forall t > 0,\ E\big(e^{tX}\big) \leq ch(t)$.

8. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$. En déduire que :
$$\forall t > 0,\ E\big(e^{tX}\big) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $P(|S_n| \geq \epsilon)$
Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\epsilon > 0$.

9. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-nt\epsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

10. En déduire que $P(S_n \geq \epsilon) \leq e^{-n\epsilon^2/2}$, puis que :
$$P(|S_n| \geq \epsilon) \leq 2e^{-n\epsilon^2/2}$$

Conclusion

11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

12. On fixe un réel $\epsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n(\epsilon) = \bigcup_{m \geq n} \big\{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \epsilon\big\}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\epsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\epsilon)\right) = 0$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons : $\Omega_k = \big\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\big\}$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $P(A) = 1$.

Indications *Q4 On applique Markov et on rappelle que l'espérance du produit est le produit des espérances quand les variables osnt mutuellement indépendantes. Q5 Le signe de g_a" est immédiat, par contre on utilisera le théorème de Rolle pour avoir un point en lequel la dérivée s'annule et en déduire l'étude de la monotonie de g_a. Q7 On utilise la croissance de l'espérance... X étant centré, on en déduit la majoration. Q10 Avec Q4 et Q9, on peut obtenir cette majoration. Q12 B_n est un évènement par opérations sur les évènements... et la limite provient de la majoration $P(B_n) \leq R_n$ où R_n est le reste d'une série convergente ! Q13 On a $\Omega_k = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n(1/k)}$ et donc, c'est encore un évènement... d'ailleurs, il faudra se convaincre que $A = \cap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$ avant d'aller chercher $P(A)$ en passant au complémentaire.*

Distinguez-vous ! Les dernières questions peuvent être délicates, car il convient de savoir décrire les évènements à ld'aide de la réunion ou l'intersecction d'autres évènements. D'ailleurs, on veillera pour les passages à la limite à invoquer avec soin le théorème de la limite monotone pour les probabilités (cas croissant ou décroissant au sens de l'inclusion).