Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (loi de Rademacher). **extrait du concours Centrale 2022 - PSI** [ ]
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1,1\}$. On note enfin $\mathcal{N}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

Présentation de la loi de Rademacher

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1,1\}, \qquad \mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}.$$

1. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}(X+1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY.

Jusqu'à la fin, n est un entier naturel non nul et $m_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$. La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est alors à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$.

On pose $\tau_n = tr\,(M_n)$ et $\delta_n = det\,(M_n)$.

4. Calculer l'espérance et la variance de la variable τ_n.
5. Calculer l'espérance de la variable δ_n.
6. Démontrer que la variance de la variable δ_n est égale à $n!$. On pourra développer δ_n selon une rangée et raisonner par récurrence.

Dans le cas particulier $n=2$, m_{11}, m_{12}, m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

7. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{N}_2$.
8. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.

Vecteurs aléatoires unitaires

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i\in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

9. Démontrer que le nombre réel :
$$C(u) = \sup\left\{|\langle u_i \mid u_j\rangle|\,,\ (i,j)\in I^2,\ i\neq j\right\}$$
existe et appartient à l'intervalle $[0,1]$. $C(u)$ s'appelle **paramètre de cohérence** de la suite $(u_i)_{i\in I}$.
10. Montrer que si $C(u)=0$, alors l'ensemble $\{u_i,\ i\in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u)\leq\varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$. On dit alors que u est une famille "presque orthogonale".

11. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $ch(t) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.
12. Soient $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$. On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1,\dots,X_n)^T$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1,\dots,Y_n)^T$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Démontrer que, pour tout nombre réel t,
$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) = \left(ch\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

13. En déduire que, pour pour tout nombre réel t,
$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

14. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

15. En déduire que : $\mathbb{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$.

16. Avec les notations et les hypothèses de la question 12, démontrer que :
$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $\left(X_j^i\right)_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ est une famille de $n\times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi de Rademacher $\mathcal{R}$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \dots, X_n^i)^T$.

17. Déduire des questions précédentes que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

18. On suppose que $n \geq 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1$.

19. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

Indications *Q4 On utilise les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de va mutuellment indépendantes. Q6 Encore une fois, on peut revenir à la définition du déterminant et les propriétés de la variance et de l'espérance... Q7 En fait dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *M nilpotente si et seulement si* $tr(M) = det(M) = 0$. *Q12 On utilise le théorème de transfert et on explicite le produit scalaire. Q15* $(|Z| \geq \lambda) = (Z \geq \lambda) \cup (-Z \geq \lambda)$. *Q17 Il suffit d'invoquer la sous-additivité de P sur la réunion au sens large...*

Distinguez-vous ! Les dernières questions sont parfois difficiles, d'autant qu'on vous demande souvent d'interpréter les choses. Essayez donc de voir ces probabilités comme la mesure d'ensembles probabilistes (nos évènements), autrement dit on a dans Q19 par passage au complémentaire : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon\right) > 0$, c'est à dire que cet ensemble n'est pas vide et il existe donc des vecteurs satisfaisant la condition demandée.

Exercice 2 (notions symplectiques). **extrait du concours Centrale 2022 - MP** [ ]

Préliminaires

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^\top AY = X^\top BY$. Montrer que $A = B$.

2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $M^\top M$ sont toutes strictement positives.
   En déduire qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^\top M$.

Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle *forme symplectique* sur E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- bilinéarité : $\forall (x,y,z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \omega(x+\lambda y, z) = \omega(x,z) + \lambda\omega(y,z)$ et $\omega(x, y+\lambda z) = \omega(x,y) + \lambda\omega(x,z)$;
- antisymétrie: $\forall (x,y) \in E^2, \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
- non dégénérescence : $\{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x,y) = 0\} = \{0_E\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E,ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors pour tout vecteur x de $E, \omega(x,x)=0$.
   Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E,ω), on appelle ω-*orthogonal* de F et on note F^ω l'ensemble
   $$F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x,y)=0\}.$$
   Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).
4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.
5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?
   Pour tout $x \in E$, on note $\omega(x,\cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x,y)$ et on considère :
   $$\begin{array}{rccl} d_\omega : E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}$$
6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.
   Pour $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on note $\ell_{|\ F}$ la restriction de ℓ à F.
7. Montrer que l'application de restriction :
   $$\begin{array}{rccl} r_F : \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F,\mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell_{|\ F} \end{array}$$
   est surjective.
8. Préciser le noyau de $r_F \circ d_\omega$. En déduire que $dim(F^\omega) = dim(E) - dim(F)$.
9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par
$$\Omega = \left(\omega\left(e_i, e_j\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
où $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

10. Montrer que
    $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x,y) = X^\top \Omega Y$$
    où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
11. En déduire que Ω est antisymétrique et inversible.
12. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.
On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(=\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$
et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

13. Montrer que l'application
    $$\begin{array}{rccl} b_s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x, j(y)\rangle \end{array}$$
    est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.
La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard* sur $\mathbb{R}^n$.

Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E,ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \omega(u(x),u(y)) = \omega(x,y)$$
On note $\mathrm{Symp}_\omega(E)$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E,ω).
Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$ un endomorphisme symplectique de E.
Soient λ,μ des valeurs propres réelles de u, et soient $E_\lambda(u), E_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

14. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire:
    $$\forall x \in E_\lambda(u), \quad \forall y \in E_\mu(u), \quad \omega(x,y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

15. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M^\top JM = J$.

    Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si :

    $$M^\top JM = J$$

    On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

    $$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top JM = J \right\}.$$

16. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.

    Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ondre $n = 2m$.*

Indications *Q1 Il suffit d'évaluer en $(X, Y) = (E_i, E_j)$ où (E_i) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Q7 Ce n'est pas difficile, partant de ℓ sur F, on prolonge sur E en imposant la fonction nulle en dehors. Q12 Ω est antisymétrique et inversible... le déterminant implique que n est pair. Q14 L'endomporphisme étant symplectique, il conserve ω et donc, $\omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y) \Leftrightarrow \lambda\mu\omega(x, y) = \omega(x, y)$ et on conclut avec $\lambda\mu \neq 1$.*

Distinguez-vous ! Les objets symplectiques aparaissent dans quelques sujets, et il s'agit de vite comprendre les définitions donnés et les parallèles éventuels que l'on peut faire avec les espaces préhilbertiens réels : forme symplectique/produit scalaire, espace symplectique/espace préhilbertien, $F^\omega/F^\perp$, endomorphisme symplectique/endomorphisme orthogonal. On veillera donc à bien cerner et exploiter toutes les définitions données en début de sujet.