Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (calcul de $\zeta(2)$). **extrait du concours CCINP 2024 - MP** [ ]

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

1. **Question préliminaire**

   Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

2. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$.

   Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

   En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$.

4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

5. Justifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x$.

6. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

7. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$. **On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.**

8. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Démontrer que f est bien définie et est continue sur $[0, +\infty[$.

9. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

10. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Indications *Q1 On va travailler par paquets de termes pairs et impairs... donc, ou bien on justifie que la famille* $(1/n^2)$ *est sommable et on travaille à cran infini, ou bien on travaille sur les sommes partielles, avantd e passer à la limite. Q4 Ici, on a* $\arcsin \circ \sin(x) = x$. *Q5 Attention en échangeant les sommes car l'intervalle peut être ouvert... ou bien, on prolonge le DSE sur* $[0, \pi/2]$ *à l'aide du théorème d'Abbel radial et on conclut par la convergence uniforme sur un segment, ou bien on invoque des théorèmes plus forts (TITAT, TCD). Q7 Même chose, on travaille sur* $[0,1[$ *et il convient d'invoquer un théorème d'interversion assez fort...*

Distinguez-vous ! Il y a plusieurs façons d'échanger somme et intégrale, surtout avec les séries entières mais le cours nous autorisent à le faire quand on est sur un segment inclus dans le domaine de convergnce. On fera donc très attention à l'intervalle sur lequel on intègre : soit on arrive à prolonger via Abel radial et dans ce cas, on récupère la CU sur le segment, soit on sera obligé d'appliquer avec soin les théorèmes d'intégration terme à terme ou de convergence dominée. Ce sont des questions fines qu'il vous faut maitriser !

Exercice 2 (éléments propres d'un endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$). **extrait du concours CCINP 2018 - PC** [ ]
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés polynômes de Legendre. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :
$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
On pourra utiliser le théorème de Rolle.
5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :
$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$
6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.
$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k).$$
En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions suivantes, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.
10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.
11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :
$$(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0.$$
13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.
14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

15. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

16. Etablir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt$ puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.$$

17. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

18. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Indications *Q3 La famille de polynômes est échelonnée en degré et elle recouvre l'ensemble des degrés de $\mathbb{R}_n[X]$. Q5 C'est encore le théorème de Rolle. Q6 En fait, on a établi un résultat par récurrence... et ainsi, $U_n^{(n)}$ possède n racines distinctes. Q13 On injecte L_n dans l'égalité précédente et on isole $\phi(L_n)$. Q17 On a prouvé que ϕ était un andomorphisme ssymétrique/auto-adjoint : les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux !*

Distinguez-vous ! Les polynômes orthogonaux... c'est un grand classique alors, on retravaille le TD spécifique là-dessus si besoin. Tchebychev, Hermite, Legendre, Jacobi, Laguerre. A vous de jouer !