Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (autour des fonctions euleriennes). **extrait du concours Centrale 2009 - MP** [ ]

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n, $\Gamma(n+1) = n!$.

Partie I : Questions préliminaires

I.1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

I.2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

I.3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$, $\gamma^x = \circ(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geq 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

II.A.1) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.
(on pourra raisonner par l'absurde).

II.A.2) Soit h un réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\phi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)dt$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

II.A.3) Prouver que :

$$\lim_{h\to 0, h>0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)dt$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a}{h}\right]} h\phi(nh) + \sum_{n=\left[\frac{a}{h}\right]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$, où $\left[\dfrac{a}{h}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{h}$.)

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha \geq 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t} t^{\alpha-1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A. En déduire que :

$$\lim_{x\to 1, x<1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha)$$

II.B.2) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n$.

a) Établir que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On note S_α la somme de cette série entière.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes:

(i) $\quad B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$

(ii) $\quad B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt$ (on pourra utiliser le changement de variable $u=\dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $\quad B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha>0$ et tout réel $\beta>0$ la formule suivante : $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont >2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta}:t\mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$.

On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire que :

$$\forall(x,y)\in[0,1]^2\quad,\quad|\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)|\leq A_{\alpha,\beta}|x-y|$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif, $|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)|\leq\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

c) On reprend les notations de la question II.B.2.

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$, $S_\alpha(x)S_\beta(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$.

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0\leq x<1$, $|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)|\leq\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma\geq1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

III.C - Formule des compléments.

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha\mapsto B(\alpha,1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0<p<q$.

a) Vérifier que:

$$B\left(\frac{2p+1}{2q},1-\frac{2p+1}{2q}\right)=2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}dt$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note $z_k=e^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2q}\pi}$. Établir que :

$$(*)\qquad\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}=-\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k}-\frac{1}{X+z_k}\right)$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left((t-\mathrm{Re}\,c)^2+(\mathrm{Im}\,c)^2\right)+\mathrm{i}\arctan\left(\dfrac{t-\mathrm{Re}\,c}{\mathrm{Im}\,c}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t-c}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation $(*)$, que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}dt=-\mathrm{i}\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}z_k^{2p+1}$$

En conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}dt=\frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$.

III.C.3) Déduire de III.C.1 et III.C.2 que : $\forall\alpha\in]0,1[\quad,\quad B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Indications *I2) On a $\Gamma''>0$ et donc Γ' est strictement croissante... IIA1) Par l'absurde, si ϕ s'annule, alors à partir d'un certain t_1, $\phi(t)\leq\phi(t_1)<0$, ce qui contredit l'intégrabilité à l'infini. IIA3) C'est une question difficile : on contrôle la différence $\int_0^{+\infty}\phi(t)\,dt-\sum_{n=0}^{+\infty}h\phi(nh)=(\int_0^{n_0h}\phi(t)\,dt-\sum_{n=0}^{n0-1}h\phi(nh))+(\int_{n0h}^{+\infty}\phi(t)\,dt-\sum_{n=n_0}^{+\infty}h\phi(nh))$. La première peut être rendu négligeable par les sommes de Riemann, la seconde par comparaison série-intégrale... et ainsi, quand h tend vers 0, on devrait rendre tout cela négligéable. IIB1) On reconnaît la question précédente avec $h=-\ln(x)$. IIIB2c) Par produit de Cauchy, c'est immédiat et on multiplie par $(1-x)^{\alpha+\beta}$ pour obtenir Γ par passage à la limite. IIIC1) On applique le critère C^0 pour les intégrales à paramètre. IIIC3) On utilise $\alpha=\frac{2p+1}{2q}$, $0<p<q$... puis on justifie que par densité, on peut étendre sur $]0,1[$: le résultat est hors programme, mais on peut se convaincre sur un dessin que tout $\alpha\in]0,1[$ peut être approché par des nombres de la forme $\{\frac{2p+1}{2q},\ 0<p<q\}$.*

Distinguez-vous ! Les premières questions sur la fonction Γ sont très classiques, et on essaiera de ne pas hésiter dans nos réponses : d'ailleurs, on essaiera de se rappeler qu'il est malin de travailler par encadrement avec la partie entière... puisque dans ce cas, on a $\Gamma(E(x))=(E(x)-1)!$.

Exercice 2 (décomposition polaire). **extrait du concours Centrale 2013 - MP** [ ]

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note:
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à cœfficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par :

$$\|M\|=\sup(|m_{ij}|,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2)$$

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
   (a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1}\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2=u$.
   (a) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2=u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $Ker(u-\lambda Id)$ que l'on déterminera.
   (b) En déduire v, puis conclure.
   (c) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v=Q(u)$.
3. Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que ${}^tAA\in\mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique couple $(O,S)\in\mathcal{O}(n)\times\mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A=OS$.
4. Déterminer les matrices O et S lorsque $A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\ \sqrt{2}/2&3\sqrt{2}&-3\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2&3\sqrt{2}&3\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O,S)\in\mathcal{O}(n)\times\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A=OS$. Un tel couple est-il unique ?
   (e) Soit φ l'application de $\mathcal{O}(n)\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O,S)=OS$ pour tout couple (O,S) de $\mathcal{O}(n)\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

Indications *Q2a) C'est classique : v et $u-\lambda.id$ commutent. Q2b) L'endomorphisme induit est encore diagonalisable et on montre que sur $E_u(\lambda_i)$, on a $v=\sqrt{\lambda_i}.id$. Q3b) Par analyse-synthèse, et en exploitant l'existence d'une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Q5a) On montre que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné, mais attention aux normes utilisées. Q5e) Les premiers points sont évidents. Reste à justifier que φ^{-1} est encore continue : pour cela, on reviendra à la caractérisation séquentielle de la continuité.*

Distinguez-vous ! Quand on invoque le théorème d'interpolation de Lagrange pour construire Q vérifiant $Q(\lambda_i)=\mu_i$ de sorte que $Q(u)=v$... on veillera à évoquer les valeurs propres distinctes $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, et ainsi il existe un unique polynôme d'interpolation $Q\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $Q(\lambda_i)=\mu_i$.