Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (marche aléatoire et retour à l'origine). **extrait du concours CCINP 2020 - PC** [ ]
Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x+1$ et une chance sur deux de se trouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.
6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que : $p_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{1}{4^m}$.

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geq 1$.
8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$
9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.
11. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geq 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$
13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ en précisant son rayon de convergence.
14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. En utilisant les questions précédentes, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.
16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Indications *Q4 On regarde les valeurs prises mais on a ici une Bernoulli. Q6 On peut utiliser le fait que $S_n = 2Z_n - n$. Q9 C'est classique : avec $\alpha = -1/2$, on retombe sur un DSE dont les termes ont été exprimés à la question précédente. Q12 Produit de Cauchy... Q15 Ici, on doit comprendre que $P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)$. Q16 On rappelle que $E(T) = G_T'(1)$.*

Distinguez-vous ! En probabilité, on peut vite faire la différence dans l'expression de vos réponses : mettez en avant le cours (indépendance, formule des probas totales, conditionnement et de la même façon, quand on doit appliquer le produit de Cauchy : on rappelle que les séries présentes doivent être absolument CV et que le résultat obtenu est vrai pour $|x| < \min(R_a, R_b)$.

Exercice 2 (spectre des matrices stochastiques). **extrait du concours CCINP 2017 - MP** [ ]

Notations

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, p désigne un entier supérieur ou égale à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme infinie définie par :
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \ \mid \ i \in [\![1,p]\!]\}.$$
- On dit que x est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :
$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \geqslant 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{p} x_i = 1.$$
- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune des ses lignes vaut 1, c'est à dire si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$
- Une matrice A est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $diag(b_1, b_2, \dots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement diagonaux par blocs) sont $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps $n+1$ qui dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$ elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer en justifiant la loi de X_1.

On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.

2. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

3. En déduire, **à l'aide de la calculatrice**, la loi de X_5 (on demande les résultats arrondis au centième).

4. Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

5. Justifier que A est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice Q inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q\, diag\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}.$$

6. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

7. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la suite des vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n + 1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1, p]\!]$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

8. Justifier que 1 est valeur propre de A (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

9. Soit x un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.

10. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Localisation des valeurs propres
Soit λ une valeur propre de A.

11. Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

12. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}$.

Étude d'un exemple

13. Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de A sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Indications *Q2 On s'applique pour utiliser la formule des probabilités totales, c'est elle qui nous fournira la relation de récurrence. Q4 Le plus simple est décrire l'évènements $(T = k)$ à l'aide des évènements $(X_i = 2)$ et $(X_i = 1)$... on fera attention à tenir compte de l'hypothèse imposée ici : l'instant k ne dépend que de l'instant précédent. Q6 C'est classique : expression linéaire en dimension finie ou polynomiale en les coefficients... Q8 On peut introduire le vecteur $U = (1, \ldots, 1)^T$ et vérifier $AU = U$. Q12 Comme $|x_i| = 1$, on a en utilisant Q11, $|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j|$ et on conclut avec l'inégalité triangulaire.*

Distinguez-vous ! Ces problèmes sur les chaînes de Markov sont nombreux et ils se ressemblent... on essaiera donc de se souvenir des grandes lignes : relation de récurrence par la formule des probas totales, réduction de la matrice stochastique (ou de sa transpoée) qui définissent les transitions et passage à la limite afin d'identifier un état asymptotique.