Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (autour de la fonction Γ). **extrait du concours CCINP 2016 - MP** [ ]

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$; démontrer que la fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   (b) On note alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathtt{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).
   Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) > 0$.
   (c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\mathtt{d}t - \frac{1}{n}$.
   (a) Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

   La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée **constante d'Euler**). Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.
3. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :
$$\text{pour tout } t \in]0,n], f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n,+\infty[, f_n(t) = 0.$$
   (a) Démontrer que, pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.
   En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$,
$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.$$
   (b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathtt{d}t.$$
4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathtt{d}u$.
   (a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.
   (b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.
   (c) Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \text{ (\textbf{formule de Gauss})}.$$
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   En remarquant que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,+\infty[$, $\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$, démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right] \text{ (\textbf{formule de Weierstrass})}.$$

6. (a) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   (b) On pose, pour tout $x\in]0,+\infty[$: $g(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

   (c) On rappelle que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. En déduire que, pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$\psi(x)=\frac{-1}{x}-\gamma+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$$

7. (a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Calculer, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 2$, $\psi(n)=-\gamma+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

Indications *Q1b) On justifie d'abord que $\Gamma(x)\geq 0$, et par l'absurde on montre que $\Gamma(x)\neq 0$. Q1c) On s'applique car c'est une questin difficile... on soignera notamment les hypothèses de domination locale ! Q2a) On étudie le terme général et on utilise les DL usuels en 0... Q4c) A partir de la formule obtenue en 3b), et on procède par Ipp successives. Q6b) C'est un critère C^1 sur les séries de fonctions. Q6c) On compose par le logarithme la formule de Weierstrass, et on dérive pour trouver l'expression attendue.*

Distinguez-vous ! Dans ce sujet, il y a vraiment des question classiques mais aussi technique : domination locale et par morceaux pour la régularité de la fonction Γ, convergence normale sur $[a,b]$ donc uniforme pour la régularité des séries de fonctions... faites donc en sorte que les théorèmes soient bien cités et que leur rédaction soit structurée sur votre copie ! Cela valorisera vraiment votre travail.

Exercice 2 (étude d'une forme quadratique sur la boule unité fermée). **extrait du concours CCINP 2020 - PC** [ ]

On se donne un entier $n\geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad x=(x_1,\dots,x_n),\quad \|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n=\{x\in\mathbb{R}^n\quad \|x\|\leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1\leq i\leq j\leq n$ et on considère l'application $f:B_n\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=i}^n a_{i,j}x_ix_j\right)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{i,j}x_ix_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la **matrice symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad m_{i,j}=\begin{cases}a_{i,j} & \text{si } i=j\\ a_{i,j}/2 & \text{si } i<j.\end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Etude d'un exemple

Dans cette **partie,** on suppose que $n=2$ et que l'application $f:B_2\to\mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall(x_1,x_2)\in B_2,\quad f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

2. On pose $\phi:t\mapsto f(\cos(t),\sin(t))$.
   Etablir que $\phi(t)=1+2\sin(2t)$, puis en étudiant la fonction ϕ, déterminer les extremas de l'application f sur la frontière $S_2=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ \ x_1^2+x_2^2=1\}$ de B_2.

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B_2'=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ \ x_1^2+x_2^2<1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.

5. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.
On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.
7. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.
9. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.
10. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.
11. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie,** on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

12. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Indications *Q1 On invoque le théorème des bornes atteintes. Q4 L'existence des extremas a déjà été donnée, il suffit de calculer l'image des points critiques... Q5 On lit bien la définition de Mf pour construire la matrice dans le cas $n = 2$, puis on détermine ses valeurs propres. Q6 C'est pénible... mais on revient au produit matriciel pour retrouver l'expression de f. Q8 P est une matrice orthogonale, elle représente donc une isométrie et conserve la norme. Q9 On calcule d'abord $Y^T DY$, puis on essaie d'encadrer la somme avec $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$. Q10 L'encadrement a été donné, il suffit de justifier que ces valeurs sont bien atteintes... en des vecteurs propres bien choisis.*

Distinguez-vous ! Ici les matrices étudiées sont symétriques réelles, on citera évidemment le théorème spectral et on s'appliquera dans sa conclusion : diagonalisable en base orthonormée... ortho-diagonalisable... $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $M = PDP^T$ avec $D = diag(\lambda_i)$, λ_i réel. C'est un gros théorème en spé et on s'est battu pour l'obtenir : soyez donc généreux et montrer que vous maitrisez l'ensemble du résultat obtenu.