Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (autour du rayon spectral). **extrait du concours Centrale 2023 - PC** [ ]
Pour toute matrice $A=(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right)\quad \text{et}\quad \|A\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

De plus, le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par $\rho(A)=\max\{|\lambda|\mid \lambda\in\operatorname{sp}(A)\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On admet de même que $\|\cdot\|_2$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A)=N\left(S^{-1}AS\right)$ pour toute $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho\left(S^{-1}AS\right)$.
4. Justifier que A est trigonalisable. Comparer, pour $k\in\mathbb{N}^*, \rho\left(A^k\right)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha\in\mathbb{C}, \rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.
5. Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A)\leq N(A)$. *On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH=\lambda H$.*

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon>0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que :

$$N(A)\leq\rho(A)+\varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ, la matrice diagonale $D_\tau=diag\left(1,\tau,\ldots,\tau^{n-1}\right)$, et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Calculer le produit $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, l'expression du coefficient en position (i,j) de la matrice $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T.
7. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $\tau\in\mathbb{R}$ vérifiant $|\tau|\leq\delta$, on a $\left\|D_\tau^{-1}TD_\tau\right\|_\infty\leq\rho(T)+\varepsilon$.
8. Conclure.
9. Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A)<1$.

Indications *Q2 On revient à la définition d'une norme, puis on montre qu'elle est sous-multiplicative. Q3 Les matrices sont semblables... donc, elles ont le même spectre ! Q5 C'est astucieux : onnote X un vecteur propre associé et on considère H la matrice constituée de X sur la première colonne, et nulle ailleurs, puis on majore $N(AH)$. Q7 On revient à la déifinition de la norme infinie, et la question Q6 nous aidrea à gérer les coefficients (i,j). Q8 On invoque Q2 avec la matrice $S=D_\tau$. Q9 En dimension finie, on peut travailler avec N et dans ce cas, on aura par exemple $\rho(A)^k=\rho(A^k)\leq N(A^k)\leq(\rho(A)+\epsilon)^k$.*

Distinguez-vous ! Quand on travaille avec de telles normes, on "casse le max" afin de majorer en module. De plus, quand une matrice est inversible, les matrices A et SAS^{-1} étant semblables, on a de nombreux invariants de similitude... notamment le polynôme caractéristique, et donc le spectre : ce qui nous permet d'identifier les rayons spectraux.

Exercice 2 (fonction de Wallis). **extrait du concours Mines-Ponts 2023 - MP** [ ]
Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}\ \text{et}\ f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\ \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
2. Exhiber deux nombres réels α et β tels que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi\left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$.

Vérifier alors que si $t \in]0,\pi]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

3. Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$, et en conclure que :

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que :

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

7. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, puis que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

8. Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Indications *Q1 Par croissances comparées, on a divergence grossière sur* $]-\infty,-1[\cup]1,=\infty[$. *Q2 C'est laborieux mais des Ipp sont efficaces, puis on pourra être plus habile sur la question suivante en se ramenant à un télescopage. Q3 C'est le lemme de Riemann-Lebesgue... à redémontrer par Ipp. Q5 On revient au critère* C^k *pour les intégrales à paramètre. Q7 C'est délicat, car on sait facilement trouver un équivalent de* $f(n)$. *En fixant* x *réel, on travaille ensuite avec sa partie entière pour retrouver par encadrement l'équivalent donné.*

Distinguez-vous ! On fera attention car la somme des cos ne commence pas à 0... ce qui oblige à transformer un peu les choses. D'ailleurs, on rappelle qu'en multipliant par $2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, on peut retrouver une somme télescopiquue. Pour finir, dans la définition de la fonction de Wallis, on n'oublie pas que $\sin(t) \sim t$, ce qui permet de justifier que $\sin(t)^x \sim t^x$ et ainsi, on est ramené à une fonction de Riemann classique.

Exercice 3 (fonctions harmoniques). **extrait du concours Centrale 2018 - MP** [ ]

Notations

- L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in U,\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

- Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = 0$$

  L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

2. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Montrer que les seules fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$ sont les fonctions constantes.

3. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations :

$$z'' + \lambda z = 0 \ \text{ et } \ z'' - \lambda z = 0$$

5. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

6. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.
7. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

8. Exprimer également $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
9. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Indications *Q2 On calcule le laplacien de f^2, et comme f est harmonique, on aura une somme de termes positifs égale à 0... Q3 On considère $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$. Q4 On fait attention aux quantificateurs, car on obtient des égalité svraies pour tout (x,y) : on peut alors choisir t ou t' qui convient. Q7 On applique la règle de la chaîne.*

Distinguez-vous ! On fait attention avec la caractérisation des fonctions constantes : sur un ouvert U convexe ou connexe par arcs, alors f est constante si et seulement si sa différentielle est nulle, c'est à dire si et seulement si $\nabla f = 0$. On n'oubliera donc pas de préciser que c'est le cas ici.