Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (probabilités et loi zêta). **extrait du concours CCINP 2021 - MP** [ ]

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$.

1. Etablir que ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.
2. On rappelle que la norme $\|.\|_\infty$ est définie sur $]1,+\infty[$ par $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in]1,+\infty[}|f(x)|$, et on fixe $a>1$.
   (a) La série $\sum\|f_n\|_\infty$ est-elle convergente sur $]1,+\infty[$?
   (b) On restreint alors l'intervalle de travail à l'intervalle $[a,+\infty[$ et on considère donc la norme infinie sur cet intervalle. Montrer que la série $\sum\|f_n\|_\infty$ est convergente.
   (c) En déduire la limite de $\zeta(x)$ quand $x\to+\infty$.
3. Soit $x>1$. On pose :
   $$I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^x}\,dt.$$
   En utilisant une comparaison série-intégrale, démontrer que $I(x)\le\zeta(x)\le I(x)+1$, puis, donner un équivalent de ζ au voisinage de 1.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et on fixe $x>1$.
   (a) Justifier en utilisant le théorème de Fubini que la famille $\{\dfrac{1}{(ab)^x},\ (a,b)\in A\}$ est sommable et que :
   $$\sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x}=\zeta(x)^2$$
   (b) En déduire que :
   $$\zeta^2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}.$$
   On pourra considérer une autre partition de A, par exemple $A=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$ où $A_n=\{(a,b)\in A,\ ab=n\}$ et invoquer le théorème de sommation par paquets.

Soit $s>1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ par :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=\frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b=ac$. On note alors $a|b$.

9. Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X\in a\mathbb{N}^*)=\dfrac{1}{a^s}$.
10. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N\in\mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence sur n que :
    $$(a_1|N,a_2|N,\dots,a_n|N)\Leftrightarrow a_1\times a_2\times\cdots\times a_n|N.$$
11. En déduire que si $a_1,a_2,\dots,a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X\in a_1\mathbb{N}^*],\dots,[X\in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants. *On pourra noter $(b_1,\dots,b_r)$ une sous-famille de $(a_1,\dots,a_n)$.*

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(2,3,5,7,11,\dots)$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1,p_2,\dots,p_n$.

12. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :
    $$P(B_n)=\prod_{k=1}^{n}1-\frac{1}{p_k^s}.$$

13. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

14. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$. Conclure.

Indications *Q1 On peut à la main comparer les sommes partielle spour $x < y$... ou plus fort aller chercher la dérivée terme à terme, en soignant la cu sur tout segment de la série dérivée. Q2c On applique le théorème de double limite en un point adhérent à l'intervalle $[a, +\infty[$. Q9 On veille à réécire l'évènement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ comme un réunion d'évènements disjoints et la sigma-additivité nous permettra de conclure. Q13 On vérifie les hypothèses du thorème de la limite monotone en probabilités...*

Distinguez-vous ! On fera attention à la gestion des familles sommables : ici, on a une famille de réels positifs, on peut donc vérifier les hypothèses de Fubini avant de sommer par paquets. Sinon, il conviendrait de vérifier la sommabilité de la famille des modules $(|u_{a,b}|)$... cela vaut le coupe de soigner cette question car elle n'est pas souvent abordée.

Exercice 2 (décomposition de Dunford). **extrait du concours CCINP 2021 - MP** [ ]

On note, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet le **théorème de décomposition de Dunford** que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

1. $A = D + N$;
2. D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale);
3. N est nilpotente;
4. $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$. Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Présentation

1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
   Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
   Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?
2. Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
   Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A.
4. **Application** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.
   Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie précédemment. *On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, $exp(M + N) = (expM)(expN)$.*
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 (A - I_n) = 0$.
   Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2. Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par: $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Calcul de la décomposition par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

6. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

7. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que:
   $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1)$, $\ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.
   Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

8. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

9. Décomposer en elements simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que:
   $$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

10. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.
    Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
    Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - id)$ parallèlement à $\ker(u - 2id)^2$ et q est le projecteur sur $\ker(\ u - 2\mathrm{id})^2$ parallèlement a $\ker\ (u - \mathrm{id})$.

11. On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) obtenue à la question Q7.
    Determiner le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Indications *Q2 Il suffit d'exhiber une matric eà coefficients réels dont le polnôme caractéristique ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Q3 On remarque que $N = A + I$ est nilpotente. Q5 En multipliant par $A + I$, on retrouve un polynôme annulateur en A^2 scindé à racines simples. Q6 Cayley-Hamilton nous offre la décomposition spectrale... cela nous évite de revenir à la caractérisation. Q12 On rappelle que p et q sont des projecteurs associés de sorte que $p + q = id$.*

Distinguez-vous ! Quand on propose la décomposition de Dunford d'une matrice donnée, on invoquera évidemment l'unicité d'un tel couple rappelé dans le théorème, mais on veillera quand même à montrer que les 4 propriétés sont à chaque fois bien vérifiées.

Exercice 3 (espérance d'une variable aléatoire). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres dont chacun est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ puis en déduire son espérance.

2. En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?

3. M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi par les codes non encore testés. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code. Déterminer la loi de X et donner son espérance.

4. A la place de la stratégie précédente, M. Toutlemonde essaye des codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non. On note encore X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code. Déterminer la loi de X et donner son espérance.

5. *Informatique Pour Tous*
   Compléter, en langage Python, le script suivant pour qu'il simule une personne essayant de deviner le code 4714 :

```
code=4714
n=int(input ('Taper un code à 4 chiffres :'))
k=..............
while ..............
..............
..............
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

Pour ne plus oublier le code, M. Toutlemonde décide de l'écrire sur un papier qu'il garde dans sa poche. Pour ne pas se faire dérober le code il le crypte de la manière suivante : il remplace chacun des 4 chiffres par lui-même additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté 9269.

6. *Informatique Pour Tous*
   Ecrire, en langage Python, une fonction `crypte(m)`, qui reçoit en entrée une liste m de 4 chiffres et renvoie en sortie la version cryptée de cette liste. Par exemple, `crypte([4,7,1,4])` renvoie $[9, 2, 6, 9]$.

Indications *Q2 On peut introduire des évènements $B_1, B_2, \ldots$... pour lesquels le code est bon au 1er essai, au 2ème essai. Cela facilite la discussion. Q3 On reconnaît une loi usuelle, on veillera donc à expliquer la situation reconnue.*

Distinguez-vous ! On ne négligera pas les questions d'info... car elles sont valorisées. Beaucoup d'élèves sautent ces questions, cela vaut donc le coup de s'appliquer : on veillera à commenter un peu les instructions et à renseigner ses programmes.