Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (transformée de Fourier et produit de convolution). **extrait du concours Centrale 2021 - MP** [ ]

Dans cette partie,
– pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée k -ième continue sur $\mathbb{R}$(si $k=0$, f est continue); on dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$; – on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}$;
– pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$.
– on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$.
– pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}) (k \in \mathbb{N})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^\mathbb{R}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle **transformée de Fourier** de f et on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}dx$$
   (a) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
   (c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout réel x.
   Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ, exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de $\hat{f}$, de ξ et de λ.

Si f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle **produit de convolution** de f et g, et on note $f * g$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$
On suppose désormais et jusqu'à la fin de la partie que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = (g*f)(x)$$
3. Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in [\![0,k]\!]$, alors $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f*g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)$.
5. On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f*g \in L^1(\mathbb{R})$.
   En admettant que, pour tout ξ réel,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)dt\right)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(t)g(x-t)dx\right)dt$$
   existent et sont égales, montrer que $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

Indications *Q1b On établit la linéarité puis on revient à la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires. Q4 Ce n'est pas difficile : on vérifie le critère C^k pour les intégrales à paramètre.*

Distinguez-vous ! Quand on applique le critère C^k, on pense à vérifier que la fonction est intégrable puis on peut toujours assurer une domination locale des dérivées successives... car continuité et dérivabilité sont des propriétés ponctuelles.

Exercice 2 (chaîne de Markov et réduction). **extrait du concours Centrale 2021 - PSI** [ ]

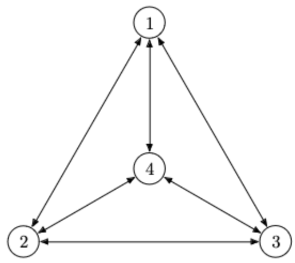
On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre en suivant les arêtes du graphe. A chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un des sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $t_{i,j}$ la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j. En particulier, on convient que $t_{i,j}$ est nul s'il n'y a pas d'arête et la matrice $(t_{i,j})$ est appelée *matrice de transition.*

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne constitué des valeurs p_i^k la probabilité que le point soit au sommet i à l'étape de rang k.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_1^{(k)} + \ldots + p_n^{(k)} = 1$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$. En déduire une expression de $P^{(k)}$ en fonction de T, k et $P^{(0)}$.
3. On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})$ converge vers un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Montrer que $PT = P$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geq 0$ avec $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

On se place alors sur le graphe suivant :



et on note J_4 la matrice constituée que de 1.

4. Exprimer la matrice de transition T de ce graphe en fonction de J_4 et I_4.
5. Démontrer qu'il existe une matrice $Q \in O_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$T = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^T$$

6. Montrer que la suite de matrices (T^k) converge et identifier géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice limite.
7. Etablir alors que, quel que soit le vecteur ligne $P^{(0)}$, la suite $(P^{(k)})$ converge vers le vecteur ligne $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

Indications *Q4 Il suffit de passer à la limite dans l'égalité mais on fera ttanetion à invoquer des opérateurs continus. Q6 On remarque que la matrice est symétrique réelle et on cherche alors à identifier son spectre pour la réduction. Q7 Comme* (T^k) *converge, il vient par passage à la limite* $PT = P \Rightarrow P^T \in Ker(T - I_4) = Im(T) = Vect(U)$*... on conclut alors à l'aide de Q1.*

Distinguez-vous ! Pour identifier le spectre de T, on évitera de revenir au polynôme caractéristique : on peut remarquer astucieusement que $T + 1/3 I_4 = J_4$, ce qui livre : $rg(T + 1/3 I_4) = 1 \Leftrightarrow dim(E_{-1/3}) = 3$. La trace nous donne alors la dernière valeur propre et ainsi, on obtient le spectre sans effort.

Exercice 3 (série de fonctions et intégrale à paramètre). **extrait du concours Mines-Ponts 2007 - PC** [ ]

On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$. Par ailleurs, pour tout réel t,

$$\operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

et on pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction. Dans tout le problème, u représente un réel appartenant à l'intervalle $] - 1, 1[$.

1. Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction $J : t \longmapsto \dfrac{t^{\gamma-1}}{\mathrm{e}^t - u}$.

Soit $t \geqslant 0$. On pose,

$$R_N(t,u) = \left(\frac{u}{\mathrm{e}^t - u} - u\mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u\mathrm{e}^{-t})^n \right) t^{\alpha-1}.$$

3. Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.

4. Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$,
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\mathrm{d}t = 0.$$

5. Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - u}\,\mathrm{d}t = K(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}, \text{pour tout } u \in]-1,1[. \tag{1}$$

6. On admet que l'identité précédente reste vraie aussi pour $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ où $x \in]0, 2\pi[$.
En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :
$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t.$$

Indications *Q4 On veillera à justifier que $t \longmapsto R_N(t,u)$ est continue avant d'appliquer le théorème de convergence dominée. Q5 On intègre l'expression donnée pour R_N, puis on fait un changement de variable sur la seconde intégrale. Q6 On évalue bêtement l'égalité obtenue et il suffit d'extraire la partie imaginaire pour en déduire l'expression de S_α.*

Distinguez-vous ! S'il y a là des choses classiques en analyse, ne baissez vos exigences. On attend par exemple : que vous rappeliez la continuité avant d'étudier les singularités au bord du domaine, que vous rappeliez que les fonctions sont continues (ou au moins cpm) avant d'invoquer le théorème de convergence dominée, que vous vérifiez que le changement de variable pour les intégrales généralisées est bien licite...