Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (intégrale de Dirichlet à l'aide d'intégrales à paramètre). **extrait du concours CCINP 2020 - PC** [ ]

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, et de calculer sa valeur.
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$
est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.
3. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt.$$

4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a : $\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt.$
6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
7. Conclure que $\forall x > 0, \quad F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t) dt \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t) dt.$$

8. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.
9. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $F_2(x) = \dfrac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2} e^{-x} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt.$
10. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Indications *Q1 N'oubliez pas de prolonger par continuité, cela lève les faux problèmes ! Q6 On peut s eplonger en complexe, à condition de savoir prouver que le crochet tend vers 0... on travaille en module, cela va plus vite. Q7 Deux primitives sont toujours égales à une constante près.*

Distinguez-vous ! Quand on évoque le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre, on s'applique et on n'hésite pas à mettre en avant des hypothèses plus faibles : on travaille par exemple sur un segment de sécurité $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty[$ qui permet d'assurer la domination...

Exercice 2 (polynôme de Laguerre et endomorphisme autoadjoint). **extrait du concours CCINP 2019 - PC** [ ]

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :
$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$
4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$.

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $Sp(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}$.

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $Ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
12. En déduire que α est autoadjoint c'est à dire que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.
13. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les question 9 et 12.

Indications *Q1 On invoque la continuité, puis on peut travailler par croissances comparées au voisinage de l'infini. Q2 L'intégrale étant bien définie, on revient à la définition d'un produit scalaire : attention, on soigne le caractère défini positif pour avoir* $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. *Q8 On cite le cours : la fameuse condition nécessaire et suffisante de diagonalisation à l'aide du polynôme caractéristique et les sous-espaces propres. Q11 on calcule le produit scalaire avant de mettre en place une Ipp sur la seconde intégrale.*

Distinguez-vous ! Dans la dernière question, on peut à la main revenir au produit scalaire $(P_i|P_j)$, mais on peut aussi voir l'application α comme un endomorphisme autoadjoint : cela signifie que les sous-espaces propres nous livrent une décomposition de l'espace en somme directe orthogonale... et ainsi, les polynômes P_i associés à des valeurs propres distinctes forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.