Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (inégalité arithmético-géométrique et inégalité de Carleman). **extrait du concours Centrale 2024 - MP** [ ]
La sous-partie II.A établit l'**inégalité arithmético-géométrique** avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la sous-partie II.B pour démontrer l'**inégalité de Carleman**.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$, est $(\mathbb{R}_+)^n$.

II.A - Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s : $X_s = \left\{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\right\}$.

1. On admet que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U_n.
2. Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$.
   `On pourra vérifier que` f `est strictement positive en certains points de` $X_s \cap U_n$.

On note $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

3. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \dfrac{f(a)}{\lambda}$.
4. Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

II.B - Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + (x_1 x_2)^{1/2} + (x_1 x_2 x_3)^{1/3} + \dots + (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$$

On admet que F_n et h_n sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n.
On note H_n l'ensemble $H_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

5. Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n.
6. Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On admet que le maximum de F_n est en fait atteint sur $U_n \cap H_n$. On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $(a_1, \dots, a_n)$ un point de $U_n \cap H_n$ en lequel il est atteint.

Pour k entre 1 et n, on note $\gamma_k = (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

7. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \dots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \qquad \dfrac{\gamma_2}{2} + \dots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$$

8. En déduire que :
   (a) $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$;
   (b) pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$, où :

$$\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) \text{ si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant \mathrm{e}$. On suppose par l'absurde que $\lambda > \mathrm{e}$.

9. Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

10. Démontrer que $\omega_1 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\omega_k \leqslant \dfrac{k}{k+1}$. `On pourra démontrer que pour tout` $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega_{k+1}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

11. Aboutir à une contradiction sur ω_n. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant \mathrm{e}$$

12. En déduire l'inégalité de Carleman : si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Indications *Q3 Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème des extremas liés. Q4 On discute les cas : s'il existe $x_i = 0$ ou sinon, dans le cas où on est dans U_n, on pose $s = x_1 + \ldots + x_n$ pour se ramener au cas précédent. Q9 On invoque simplement la concavité de $x \longmapsto \ln(1+x)$. Q10 Par récurrence... Q12 On pose encore $s = x_1 + \ldots + x_n > 0$ et $y_i = x_i/s$ avant d'utiliser la majoration précédente.*

Distinguez-vous ! Le calcul différentiel est souvent mal mené... on essaiera donc de soigner le vocabulaire (applications partielles, dérivées partielles, applications différentielles en a...), d'ailleurs dans l'utilisation du théorème des extremas liés, on veillera à bien vérifier les hypothèses : existence d'un extrema en un point $a \in X$ et les équations qui régissent X fournissent des différentielles indépendantes (ici, $dg_a \neq 0$).

Exercice 2 (décomposition d'une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). **extrait du concours Centrale 2017 - MP** [ ]

La transposée d'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée A^T. Le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $S_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $A_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note :
$$A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \text{ et } A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$
Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $A = A_s + A_a$. On dit que A_s est la *partie symétrique* de A et que A_a est sa *partie antisymétrique*.

Une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives et elle est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et on note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique donné par :
$$(M, N) \mapsto tr(M^T N)$$
On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $M_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs dimensions.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\|_2 \leq \|A - S\|_2$. Préciser à quelle condition sur $S \in S_n(\mathbb{R})$, cette inégalité est une égalité.

On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$.

3. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $X^T MY$ appartient à $M_1(\mathbb{R})$ et on convient de l'identifier au nombre réel égal à son unique coefficient. Avec cette convention, montrer que $A_s \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A_s X \geq 0$ et que $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T A_s X > 0$.

4. (a) Pour toute valeur propre réelle λ de A, montrer que $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.
   (b) En déduire que si $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est inversible.

5. On suppose que $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $A_n(\mathbb{R})$ telle que $det(A) = det(A_s)det(I_n + Q)$.
   (c) En déduire que $det(A) \geq det(A_s)$.

Indications *Q1 On pourra exhiber une base de chacun des sous-espaces constituée de matrices élémentaires. Q4a On montre d'abord que* $X^T A_a X = 0$ *et* $X^T A_s X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ *où* λ_i *sont les valeurs propres de* A_s*, puis on travaille avec un vecteur propre pour* A *afin de relier les spectres de* A *et* A_s*. Q5c On commence par rappeler :* $Q \in A_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ *ses valeurs propres sont de la forme* $i\mu, \mu \in \mathbb{R}$.

Distinguez-vous ! L'existence de la racine carrée d'une matrice symétrique positive est un grand classique : on ne traînera pas en proposant le bon candidat. Par contre, on peut (rarement) vous demander l'unicité de celle-ci : essayez donc d'etre élégant sur cette question, en revenant aux endomorphismes, ou bien via la co-orthodiagonalisation en considérant une autre matrice satisfaisant l'égalité $R^2 = S$.