Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (matrice symétrique réelle et inégalités associées). **extrait du concours CCINP 2014 - MP** [ ]
On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :
$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leq 1.$$
3. En déduire que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel : $T(A) = \mathrm{Tr}(AS)$.
   (a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :
   $$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$
   (b) Démontrer que l'application T de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $O_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.
   (c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $O_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Soit $S = (s_{i,j}) \in S_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :
$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

5. Montrer l'inégalité valable pour tout $S \in S_n^+(\mathbb{R})$:
$$\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$
6. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^T S D$. Démontrer que $S_\alpha \in S_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{Tr}(S_\alpha)$.
7. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :
$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$
8. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :
$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i} \ \ \text{(inégalité d'Hadamard)}.$$

Indications *Q1 Composée de fonctions continues : ici il y a notamment un produit bilinéaire, donc continue en dimension finie et la transposée, linéaire donc continue en dimension finie. Q2 les vecteurs colonnes forment une BON, donc en norme euclidienne, cela vaut 1 ce qui donne la majoration. Q4a On utilise le théorème spectral et on rappelle que $tr(AB) = tr(BA)$, mais aussi que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe $\times$: il est stable par produit ! Q4c On revient aux coefficients pour obtenir la majoration : avec $A = I_n$, on voit que le majorant est atteint, et on tient donc notre max. Q5 On revient à la notation* exp *et on utilise la concavité du logarithme. Q8 $S + \epsilon In$ est encore symétrique psoitive, on applique l'inégalité $*$ avant de passer à la limite quand $\epsilon \to 0$.*

Distinguez-vous ! Les questions de topologie sont peu abordées, mais ce sont toujours les mêmes : essayez de bien mémoriser ces questions classiques, on reverra notamment comment citer le théorème des bornes atteintes pour les fonctions continues sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (suites de fonctions et intégrales généralisées). **extrait du concours CCINP 2022 - PC** [ ]

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$, et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}\,.$$

1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \Delta_n$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}.$$

4. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a : $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t)$.
5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$.
7. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 u^n \ln(1-u)\,du$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.
9. En utilisant la suite de fonctions (f_n), montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt\,.$$
10. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,du$ est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :
$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,du = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\,.$$
11. Montrer que l'on a la relation $I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n$.
12. Déduire des questions précédentes que $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

Indications *Dans la première partie, on veillera à utiliser le théorème de sommation des équivalents pour les séries de signe constant... car ici $\Delta_n < 0$. De plus, il faut se rappeler de la série télescopique de même nature que la suite (u_n) !*

Distinguez-vous ! On s'applique sur le théorème de convergence dominée : n'hésitez pas à dire qu'on reconnait une suite de fonctions continues sur I, on peut vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée. Montrez ici que vous êtes rigoureux et maitrisez les hypothèses à vérifier.