Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). **extrait du concours Mines-Ponts 2017 - PSI** [ ]

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

1. Soit $x \in Ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
3. En déduire que $E = Ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.
4. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p \ : \ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P telle que $P^2 = P$.

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$. On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On rappelle qu'une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ a_{i,j} \geqslant 0 \ (3) \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \ (4) \end{cases}$$

6. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
7. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
8. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
9. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
10. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Pour tout k entier naturel non nul, on posera encore :

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

   Etablir alors que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P qui est encore stochastique.

Indications *Q3 En dimension finie, il n'y a qu'une seule condition à vérifier... l'autre résultant du théorème du rang. Q7 On revient à la CNS $AU = U$. Q10 La convergence est déjà acquise en Q5, à condition de vérifier l'hypothèse sur la norme de AX. Par contre, on expliquera soigneusement pourquoi la limite est encore stochastique.*

Distinguez-vous ! Les questions de topologie sont rarement traitées ou mal traitées... on n'hésite donc pas à soigner sa rédaction et on évoque volontiers les résultats connus : "*en dimension finie, les normes sont équivalentes donc la convergence ne dépend pas du choix de la norme*" ; "*on peut se remaner à la caractérisation séquentielle des fermés*"...

Exercice 2 (autour de la décomposition spectrale). **extrait du concours Mines-Ponts 2023 - MP** [ ]

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2. On note $|||u||| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que: $|||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||$, et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $\|u\|$ et de lentier k.

Dans la suite, a désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

4. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

où pour $i \in [\![1;r]\!], E_i = Ker\,(a - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbb{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$.
Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array}\right. \quad \text{et } q_i : \left|\begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbb{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array}\right. .$$

Par ailleurs, on note $|||\cdot|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||\cdot|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6. Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7. Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbb{C}^n}$ et id_{E_j}.

8. Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i$$

Indications *Q1 On peut travailler par antisymétrie. Q4 On fait intervenir deux théorèmes fondamentaux : Cayley-Hamilton et celui de la décompostion des noyaux. Q7 On rappelle que p_i désigne la projection sur le sous-espace caractéristique, donc on connait son noyau et son image. Q8 On montre que les applications coïncident pour tout $x \in E$.*

Distinguez-vous ! L'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice est une notion classique, mais il convient de préciser son existence avec soin avant de travailler à cran fini : ici, on pensera donc à assurer une convergence en norme triple, puis de rappeler qu'en dimension finie, la convergence absolue entraîne bien la convergence.

Exercice 3 (fonction génératrice et séries entières). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que Y suit une loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence. On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)t^n.$$

1. Préciser en particulier $\mathbf{P}(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer précisément que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[,\ G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.
3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.
4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.
6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions suivantes, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$,

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$$

7. Montrer que l'on a :
$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$
8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.
9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors
$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Indications *Les premières questions, c'est du cours... Q5 Le plus efficace est encore de faire la règle de D'Alembert pour avoir un point de rupture. Q9 On peut invoquer un produit de Cauchy en vérifiant que les rayons de convergence conviennent.*

Distinguez-vous ! Attention, dans l'utilisation du théorème relatif au produit de Cauchy, les élèves oublient d'évoquer le fait qu'on a bien des séries absolument convergentes... c'est une hypothèse à vérifier, d'ailleurs ici il s'agit de l'appliquer avec rigueur à des séries entières : c'est pour cela qu'il faut parler des rayons afin de garantir l'égalité obtenue sur $|z| < \min(R_a, R_b)$.