Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (intégrale à paramètre et fonction Γ). **extrait du concours CCINP 2019 - PSI** [ ]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.
3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.
4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
   La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.
7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a: $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p} e^{-p}$.
8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
   La fonction g est-elle développable en série entière en 0?

Indications *Q1 On pense surtout à travailler en module pour utiliser les comparaisons sur les fonctions à valeurs positives. Q4 On utilise le critère C^k et encore une fois, on domine en module ! Q5 et Q7 on fait intervenir Jean Le Rond mais ici le rayon de convergence qu'on peut calculer est nul... chose rare mais aucune n'est DSE !*

Distinguez-vous ! Pour justifier l'intégrabilité d'une fonction à valeurs complexes, on peut évidemment se ramener aux fonctions parties réelles et intégrables, ou tout simplement prouver l'intégrabilité en module : l'avantage c'est qu'on peut récupérer tous les théorèmes de comparaison sur les fonctions à valeurs positives.

Exercice 2 (fonction génératrice et séries entières). **extrait du concours CCINP 2022 - MP** [ ]

On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que Y suit une loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$. On note G_Y la série génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence. On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[, \; G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n) t^n.$$

1. Préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer précisément que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[$, $G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.
3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.
4. Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

5. Montrer que $\sum u_n(a) z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions suivantes, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a) u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$,

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$$

7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Indications *Les premières questions, c'est du cours... Q5 Le plus efficace est encore de faire la règle de D'Alembert pour avoir un point de rupture. Q9 On peut invoquer un produit de Cauchy en vérifiant que les rayons de convergence conviennent.*

Distinguez-vous ! Attention, dans l'utilisation du théorème relatif au produit de Cauchy, les élèves oublient d'évoquer le fait qu'on a bien des séries absolument convergentes... c'est une hypothèse à vérifier, d'ailleurs ici il s'agit de l'appliquer avec rigueur à des séries entières : c'est pour cela qu'il faut parler des rayons afin de garantir l'égalité obtenue sur $|z| < \min(R_a, R_b)$.

Exercice 3 (autour de la décomposition spectrale). **extrait du concours Mines-Ponts 2023 - MP** [ ]

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2. On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que: $|||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||$, et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $\|u\|$ et de lentier k.

Dans la suite, a désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

4. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

où pour $i \in [\![1;r]\!], E_i = Ker\,(a - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbb{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$.

Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array}\right. \quad \text{et } q_i : \left|\begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbb{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array}\right. .$$

Par ailleurs, on note $|||\cdot|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||\cdot|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :
$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$
6. Montrer que, pour $i \in [\![1; r]\!]$, E_i est stable par a.
7. Soient $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbb{C}^n}$ et id_{E_j}.
8. Montrer que : $a = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.
9. En déduire que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i$$

Indications *Q1 On peut travailler par antisymétrie. Q4 On fait intervenir deux théorèmes fondamentaux : Cayley-Hamilton et celui de la décompostion des noyaux. Q7 On rappelle que p_i désigne la projection sur le sous-espace caractéristique, donc on connait son noyau et son image. Q8 On montre que les applications coïncident pour tout $x \in E$.*

Distinguez-vous ! L'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice est une notion classique, mais il convient de préciser son existence avec soin avant de travailler à cran fini : ici, on pensera donc à assurer une convergence en norme triple, puis de rappeler qu'en dimension finie, la convergence absolue entraîne bien la convergence.