Planche de préparation pour les écrits ★★★

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (séries entières). **extrait du concours Mines-Ponts 2022 - PSI** [ ]
On admettra aussi les deux identités classiques suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et } \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

A. Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$.

   On notera $L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.

3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que:

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

4. Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.

   En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} L(z^n)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D, $P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right]$.

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$ et que $P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$. En déduire que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1} \,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8. Montrer que pour tout $n > 1$, $\displaystyle\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1$.

9. Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} \,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité:

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

10. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right) \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}$.

Indications *Q3 Composée de fonctions dérivables, on montre que ψ' est nulle sur $[0,1]$, on détermine la constante avant d'évaluer en 1. Q5 On travaille à cran fini puis on évoque les produits de l'exponentielle. Attention, on soignera les passages à la limite. Q8 C'est classique : on utilise la relation de Chasles pour découpe rl"intégrale sur des segmenst de la forme $[k,k+1]$. Q9 C'est une question qu'il faut traiter avec soin... on a la convergence de la suite $\int_1^n$ ... et on cherche à récupérer la convergence de $\int_1^x$ .... Q10 A l'aide des DSE, on se ramène au théorème d'inétgration terme à terme de Lebesgue.*

Distinguez-vous ! Quand on définit une telle fonction par morceaux et notamment à l'aide de la partie entière, il est toujours intéressant de la représenter : un dessin montre souvent que la fonction a été bien comprise, et le travail sur des segments sous-jacents devient alors plus naturel.

Exercice 2 (matrices nilpotentes). **extrait du concours Centrale 2022 - PSI** [ ]

1. Démontrer que l'application $tr : M \longmapsto tr(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et que pour toutes matrices A, B,
$$tr(AB) = tr(BA)$$
2. Montrer que l'application $(A, B) \longmapsto tr(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^{\mathsf{T}} A = 0_n$ alors $A = 0_n$.
4. Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors 0 est une valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre complexe de A. Déterminer alors la trace et le déterminant d'une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que, si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.
6. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $M\,N$ et $M + N$ sont nilpotentes.
7. On suppose que M, N et $M + N$ sont nilpotentes. En calculant $(M + N)^2 - M^2 - N^2$, montrer que $tr(M\,N) = 0$.
8. Démontrer qu'une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $det(M) = tr(M) = 0$.
9. Montrer que la seule matrice réelle nilpotente et symétrique est la matrice nulle.
10. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^{\mathsf{T}}\,A = 0_n$, puis que $A = 0_n$.
11. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant nul, mais non nilpotente.

Indications *Q6 C'est classique et généralement on propose la puissance qui va bien :* $(MN)^{\min(p,q)}$, $(M+N)^{p+q}$. *Q8 On pensera à rappeler la forme du polynôme caractéristique en petite dimension.*

Distinguez-vous ! Pour montrer que 0 est la seule valeur propre... on attend ici la preuve du cours : si P est un polynôme annulateur, alors on montre que pour λ vp et X vp, alors $P(M)X = 0 \Rightarrow P(\lambda)X = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$.

Exercice 3 (intégrale à paramètre et fonction Γ). **extrait du concours CCINP 2019 - PSI** [ ]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.
3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.
4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
5. En déduire le rayon de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.
7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a: $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p} e^{-p}$.
8. En déduire le rayon de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$. La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

Indications *Q1 On pense surtout à travailler en module pour utiliser les comparaisons sur les fonctions à valeurs positives. Q4 On utilise le critère* C^k *et encore une fois, on domine en module ! Q5 et Q7 on fait intervenir Jean Le Rond mais ici le rayon de convergence qu'on peut calculer est nul... chose rare mais aucune n'est DSE !*

Distinguez-vous ! Pour justifier l'intégrabilité d'une fonction à valeurs complexes, on peut évidemment se ramener aux fonctions parties réelles et intégrables, ou tout simplement prouver l'intégrabilité en module : l'avantage c'est qu'on peut récupérer tous les théorèmes de comparaison sur les fonctions à valeurs positives.