Planche de préparation pour les écrits

L'objectif de cette planche est de mettre en avant quelques résultats du cours et de les mettre en oeuvre. Il ne s'agit donc pas d'exercices de recherche et pour lesquels il faut proposer des pistes intelligentes...
Pas du tout, ici je vous demande simplement de faire tourner les théorèmes du cours et de soigner la rédaction : cela vous distinguera des autres candidats !

Exercice 1 (recherche de solutions DSE). **extrait du concours CCINP 2016 - MP** [ ]
On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$$

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

Indications *On procède normalement par analyse-synthèse : sous réserve d'existence, en notant f une telle solution non nulle, on arrive à identifier les coefficients du DSE... pour avoir a_n nul ! Conclusion : c'est donc impossible.*

Distinguez-vous ! Quand on identifie les coefficients, on évoque avec soin l'unicité des coefficients du DSE.

Exercice 2 (matrices nilpotentes). **extrait du concours Centrale 2022 - PSI** [ ]

1. Démontrer que l'application $tr : M \longmapsto tr(M)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et que pour toutes matrices A, B,
$$tr(AB) = tr(BA)$$
2. Montrer que l'application $(A, B) \longmapsto tr(A^TB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^{\mathsf{T}}A = 0_n$ alors $A = 0_n$.
4. Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors 0 est une valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre complexe de A. Déterminer alors la trace et le déterminant d'une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que, si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.
6. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $M\,N$ et $M + N$ sont nilpotentes.
7. On suppose que M, N et $M + N$ sont nilpotentes. En calculant $(M + N)^2 - M^2 - N^2$, montrer que $tr(M\,N) = 0$.
8. Démontrer qu'une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $det(M) = tr(M) = 0$.
9. Montrer que la seule matrice réelle nilpotente et symétrique est la matrice nulle.
10. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^{\mathsf{T}}A = 0_n$, puis que $A = 0_n$.
11. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant nul, mais non nilpotente.

Indications *Q6 C'est classique et généralement on propose la puissance qui va bien : $(MN)^{\min(p,q)}$, $(M+N)^{p+q}$. Q8 On pensera à rappeler la forme du polynôme caractéristique en petite dimension.*

Distinguez-vous ! Pour montrer que 0 est la seule valeur propre... on attend ici la preuve du cours : si P est un polynôme annulateur, alors on montre que pour λ vp et X vp, alors $P(M)X = 0 \Rightarrow P(\lambda)X = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$. Autrement dit, les valeurs propres sont parmi les racines de P.

Exercice 3 (fonction zeta de Riemann). **extrait du concours E3A 2017 - PC** [ ]

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1;\ +\infty[$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$. Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. Etablir que ζ possède une limite finie en $+\infty$. On citera avec soin le théorème utilisé.
6. On considère à présent $h \in]0;\ +\infty[$. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$, puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) Justifier que F est bien définie, puis montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
   (c) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Indications *Q3b On pense à exploiter le théorème de dérivation pour les séries de fonctions et on s'applique pour la convergence (ici, normale) de la série dérivée : vous devriez reconnaître une série de Bertrand dont le terme est en $o(1/n^\alpha)$... Q8a On fixe x pour justifier d'abord la convergence absolue et donc l'existence, puis pour la continuité, on retourne chercher la CU... ici, c'est une série entière et on a immédiatement la CU du reste partiel.*

Distinguez-vous ! Dans l'utilisation des théorèmes sur les séries de fonctions, on peut vite faire la différence : on doit donc s'appliquer sur le travail de la convergence normale ou uniforme : ainsi, on commence par majorer indépendamment du paramètre, puis par passage au sup, on gère le terme général en norme infinie. Par comparaison sur les séries à termes positifs, on conclut :)