1 Mathématiques

1.1 Remarques générales

L'objectif de l'épreuve orale de Mathématiques est de permettre à chaque candidat d'exprimer ses qualités. Sont principalement évaluées la maîtrise des différentes notions au programme, la capacité à élaborer seul un raisonnement, la capacité à argumenter et à critiquer, la prise d'initiative, sans oublier la qualité de la communication orale.

Le jury souhaite souligner le **bon niveau** global des admissibles au CCMP en 2023, et retire une bonne impression de ces quatre semaines d'oral. De nombreux candidats sont excellents et bien préparés à l'épreuve. La plupart d'entre eux se montrent motivés, capables de prendre des initiatives et d'exploiter les indications de l'examinateur. Seule une petite minorité propose un oral insuffisant.

Dans une grande majorité, les candidats possèdent de solides connaissances, sont capables d'initiative face à des exercices originaux et s'emploient à échanger avec l'examinateur. On les félicite, convaincu qu'ils ont toutes les aptitudes pour poursuivre avec profit leur formation scientifique.

Le jury a apprécié la courtoisie des candidats et la qualité des échanges au cours de ce qui demeure un moment de mathématiques, au delà du concours et de son stress.
Nous rappelons que l'évaluation se fait sur le programme des deux années de préparation. Les qualités attendues se développent par un travail régulier et en profondeur.
Enfin, nous recommandons aux candidats de lire les précédents rapports où ils trouveront d'autres conseils pour améliorer leur préparation.

On note parfois une difficulté à lire l'énoncé donné en préparation ou à utiliser les hypothèses données dans l'énoncé. Prendre le temps de lire l'énoncé et d'observer et comprendre les objets proposés fait partie de l'exercice.

Très souvent, l'énoncé propose des objets mathématiques dont l'existence n'est pas évidente (par exemple, une intégrale, la somme d'une série, une borne supérieure, le terme général d'une suite, etc.). Il est frappant de constater que la question de l'existence des objets ne semble même pas effleurer certains candidats, alors même qu'étudier l'existence permet souvent de mieux appréhender les objets et d'entrer plus efficacement dans l'exercice. De manière générale, s'assurer de l'existence des objets est nécessaire avant de les manipuler, par exemple avant d'écrire des inégalités.

Même si l'oral de Mathématiques reste un exercice difficile, l'objectif est non pas de piéger les candidats à travers des calculs fastidieux, mais bien de révéler la capacité à la prise de recul vis-à-vis d'une situation donnée. Le candidat sera évalué sur sa faculté d'analyse et à la façon dont il pourra tirer partie de ses connaissances pour proposer une réflexion adaptée.

1.2 Mathématiques - filières MP et MPI

1.2.1 Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve dure entre 1h05 et 1h15. Le candidat sera évalué sur (au moins) deux exercices portant sur des domaines différents (algèbre, analyse et probabilités) des programmes de première année et de

deuxième année.
Pour le premier exercice, le candidat dispose d'un temps de préparation sur table de 15 minutes. Ce dernier et l'examinateur échangeront ensuite pendant un temps d'environ 50 minutes à 1h. D'abord à propos de l'exercice préparé puis à propos d'un second qui sera traité sans préparation. L'examinateur décide du temps consacré à chaque exercice en fonction de la prestation du candidat, et ce toujours dans son intérêt.
L'évaluation portera, entre autres, sur :

– la maîtrise et la compréhension des notions mathématiques au programme,

– la capacité à proposer des pistes de résolution, les explorer et les critiquer si nécessaire,

– la capacité à élaborer une solution structurée et argumentée,

– la capacité à rebondir sur les indications de l'examinateur.

1.2.2 Remarques sur la session 2023 et conseils aux futurs candidats

Comme l'an dernier, le jury constate que les candidats sont bien préparés et sont globalement de bon niveau.
On ne constate pas de différence significative entre MP et MPI. La majorité d'entre eux propose un oral très satisfaisant, se montrant capable d'adopter une réelle démarche mathématique et - réfléchissant à haute voix - de mettre en œuvre une véritable stratégie pour résoudre l'exercice proposé.
Le jury tient à saluer l'excellent travail mené par les admissibles au CCMP durant ces deux années de préparation.
Les candidats qui ont résolu une ou plusieurs questions lors de la préparation doivent l'annoncer au début de l'échange. Il en est de même sur ce qu'ils vont engager (il est inutile de commencer l'oral par décrire l'exercice au début pendant des minutes gâchées). Une recopie linéaire et sans explication de calculs plus ou moins bien menés sur le brouillon sera pénalisée. Ils doivent également intégrer le fait d'être interrompus par l'examinateur qui demande une précision ou une clarification et ne doivent pas être déstabilisés.
Le jury attend un juste équilibre entre argumentions orales et traces écrites du raisonnement. Sans l'emploi d'un minimum de quantificateurs lors de l'exposé d'une résolution, le candidat prend le risque de se perdre lui-même. Par exemple, sans expliciter qu'une propriété est vraie pour « tout x réel », il est difficile de penser à spécifier ce « x » pour obtenir la réponse à la question suivante.
Une bonne gestion du tableau, la capacité à s'exprimer clairement et avec précision seront appréciés (quand on veut dire « ...va être... » on ne prononce pas « ...vatêtre...»).
Le soin, la qualité de la rédaction (même succincte) et de l'orthographe, la communication avec l'examinateur (notamment la prise en compte des indications) sont nécessairement pris en compte dans l'évaluation.
Tout résultat au programme invoqué sera précédé de la vérification précise de toutes les hypothèses. Les quelques candidats négligeant cette phase sont systématiquement pénalisés.
De même, la seule évocation de noms de mathématiciens glorieux ne saurait faire office d'argumentations. Les expressions « par Riemann, l'intégrale converge », « par d' lembert, la série diverge », « par Gauss,

il y a des racines », « par Cauchy- Lipschitz, la solution est unique », sont à proscrire. Enfin, les rares candidats qui ne connaissent pas les définitions ou le cours sont lourdement sanctionnés.
Si l'utilisation d'un chronomètre lors de la phase de préparation est légitime et remplace l'usage d'une montre, le chronométrage de l'interrogation elle-même est du plus mauvais effet.

nalyse des difficultés

1 nalyse.

Les erreurs de calculs ou lors de manipulation d'égalités / inégalités, les oublis concernant les signes et les valeurs absolues sont trop fréquents. Ils invalident de nombreuses preuves. Même si leur correction est rapide au tableau, ces points ne doivent pas être considérés comme mineurs.

Savoir majorer une expression est fondamental. Trop de candidats ne savent pas établir une majoration par étapes successives ou par réduction à une inégalité plus simple et essaient systématiquement de « deviner » des majorations complexes, y compris lors de confinements de paramètres (intégrales paramétriques, convergence uniforme). Cela échoue presque toujours.

Les développements limités ou asymptotiques ne sont pas traités avec suffisamment de rigueur : oubli de o, utilisation abusive des équivalents, refuser une translation pour se ramener à une étude en 0. De même, les formules de Taylor comportent très souvent des erreurs. C'est d'autant plus regrettable que leur validité peut être facilement testée sur des petites valeurs de n. En particulier, la formule de Taylor avec reste intégrale est à consolider.

Les candidats oublient trop souvent de faire appel au lien entre dérivée et intégrale (théorème fondamental de l'analyse) ou à l'inégalité des accroissements finis dans les applications. Ils préfèrent passer par un développement limité qui s'avère inapproprié pour le problème étudié.

Les hypothèses de positivité (théorèmes de comparaison, familles sommables, etc ...) sont presque toujours oubliées.

Le théorème d'interversion terme à terme est un critère suffisant, non nécessaire. Lorsqu'il ne s'applique pas, il faut être en mesure de proposer une alternative et l'exploiter. Les techniques de comparaison d'une série avec une intégrale sont parfois mal maîtrisées. ucun des candidats confrontés à une interversion série-intégrale pour des fonctions positives ne connaissait le théorème très simple dans ce cas, rajouté dans les nouveaux programmes de cette année.

Beaucoup de candidats n'ont pas su étudier la convergence d'une intégrale dont l'intégrande comportait une fonction périodique en découpant le domaine d'intégration pour se ramener à l'étude d'une série.

Le calcul différentiel reste le domaine le moins bien maîtrisé. Même si le jury note une aisance plus grande (mais toujours insuffisante) dans l'utilisation de la règle de la chaîne, les autres concepts comme le gradient ou la différentielle sont incompris. Toute question sur le calcul de dérivées partielles (avec changement de variables) est une catastrophe annoncée ; la résolution d'équations aux dérivées partielles par changement de variables est classique, mais nécessite beaucoup de rigueur. Un raisonnement par analyse-synthèse est en effet nécessaire.

Un point critique n'est pas forcément un extrema pour la fonction (faire attention en particulier à la nature du domaine de définition de la fonction). La non-existence d'extrema globaux pour une fonction à plusieurs variables ne nécessite pas toujours la recherche des points critiques.

Enfin, le théorème de Schwarz peut être très utile pour montrer qu'une fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

2 lgèbre linéaire et bilinéaire.

Les candidats doivent connaître les deux formes du théorème spectral, matricielle et géométrique. La seconde (via l'utilisation d'une base orthonormée adaptée) est indispensable pour la résolution de certains exercices.

La difficulté à exprimer la distance entre un vecteur et un sous-espace d'un espace euclidien révèle la faible vision géométrique des candidats. Elle mérite d'être développée.

La factorisation des polynômes dans R[X] n'est absolument pas maîtrisée.

Beaucoup de candidats (re)découvrent qu'un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint et certains en font même un élément du groupe orthogonal !

La densité du groupe linéaire dans l'ensemble des matrices carrées est brandie comme argument universel permettant de prolonger n'importe quel résultat - y compris ceux faisant intervenir l'inverse - à toutes les matrices.

Les candidats savent que l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice est un idéal mais ne savent pas comment mettre à profit cette structure.

La stabilité des sous-espaces caractéristiques n'est pas aussi connue que celle des sous-espaces propres. La formule du déterminant de Vandermonde est à consolider. La notion de norme triple est mal maîtrisée. Le cours sur l'exponentielle d'une matrice n'est pas bien exploité ; la relation sur les exponentielles de matrices semblables est systématiquement reprise.

3 Probabilités.

Les résultats théoriques liés aux séries génératrices sont assez mal connus, en particulier celui lié aux sommes de variables indépendantes.

Il est indispensable de raisonner en termes d'événements avant de se lancer dans des calculs de probabilités. Il s'agit par exemple d'utiliser une partition pour obtenir une somme finie, une sigma-additivité pour une somme de série, une indépendance pour obtenir un produit, etc. Ces étapes sont en particulier cruciales lorsqu'il s'agit de justifier le passage à la limite dans le calcul d'une probabilité faisant intervenir une suite d'évènements. Ces arguments doivent être clairement explicités. La plupart des candidats doivent progresser sur ce point.

4 Généralités et recommandations.

Les nouveautés du programme : Hessienne, matrices symétriques positives sont souvent bien maîtrisées à l'exception du théorème d'optimisation sous contrainte.

Les récurrences doivent être un minimum soignées, l'énoncé de la propriété étant indispensable.

Les raisonnements par analyse-synthèse doivent être mieux rédigés. Le hors-programme utilisé par le candidat est à proscrire, ou du moins à évoquer avec grande prudence.

Les exercices ne sont pas tous du même niveau même si un exercice peut être surprenant sans être pour autant difficile. Cependant, la façon de conduire l'interrogation et de l'évaluer intègrent la difficulté de l'exercice. En particulier, on donne beaucoup plus d'indications sans grandes conséquences sur la note si l'exercice est difficile. De plus, il est normal de confronter les futurs ingénieurs à des nouveautés : pour appliquer des procédés bien rodés il y a des techniciens, on va chercher les ingénieurs pour les situations nouvelles et les innovations.

1.2.3 Conclusion

L'oral est une épreuve longue et il convient de poser les raisonnements sans se précipiter. L'examinateur ne s'attend pas à ce que le candidat résolve l'exercice d'une seule traite mais qu'il explore des pistes, envisage des cas particuliers et tente d'extrapoler ses résultats dans les cas plus généraux.

1.3 Mathématiques - filière PC

1.3.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve d'oral de mathématiques PC donne lieu à une préparation de 15 minutes sur table, portant sur un premier exercice. Un second exercice est proposé au milieu de l'épreuve, avec une réflexion « en direct ». Les deux exercices portent sur des domaines différents des programmes de PCSI et PC. Typiquement, le premier et le second exercice corresponderont à un couplage algèbre / analyse ou probabilités / analyse, dans un ordre arbitraire.
Le passage au tableau proprement dit dure entre une cinquantaine de minutes et une heure, ce passage au tableau étant divisé en deux parties :

- une présentation des questions préparées et éventuellement une poursuite des questions « en direct »
- approximativement au milieu de l'épreuve, un deuxième exercice est proposé, même si le premier exercice n'est pas intégralement traité.

L'oral a pour objectif d'évaluer les candidats sur les points suivants :

- la connaissance et la compréhension des notions mathématiques des programmes de PCSI et PC,
- la capacité technique de calculs,
- la faculté à restituer une réflexion appropriée à une situation donnée, à gérer l'espace de travail (tableau à disposition), à interagir avec l'examinateur, celui-ci pouvant à tout moment interroger sur une question annexe au problème posé ou proposer une indication pour aider le candidat.